

Hubert

Book 129

P. Kiggabion

Adam Cierowicki



quo abiens ad requiritionem & notificationem  
 hanc ad illos transmittere tenebitur. Et si  
 collegae praeterea habent facultatem legem  
 mand. d. fol. 256. §. *Korona Królewska Polskiego.*  
 notificationem nonnullae Provinciae Regni huius  
 Notaria Regia eximentes, quam ipsi permittunt  
 et etiam alij volentibus liberum erit hoc  
 in consensu omnium. Si vero videretur illi  
 administrationem iustitiae in personam No-

Succello.

Ordines M.

jure Li.

Comitis

admi-

lente ma-

olite iura-

n & judi-

ta.

ona nostra

a nova in

gnum spe-

ednum ex

agno & M.

mentem.

fol. 256. §. *Obsoluita to warianty.*

solium plurimum spectat ad interesse Reipu-

adimus pro Nobis & Succelloribus Nostri Re-

lium respectu ejusmodi matrimonij abq; no-

in Regni utriusq; Gentis facimus, & praeter

aria expreſſas, nunquam divortium procura-

*Legatos Nostros nomine Nostro portat*

ac verbo Regio Nostro spondemus totum id,  
 catum & iurium suorum Ordines Regni utri-

Nobis portarent. acceptamus &

910205 I  
 Mag. St. Dr.





*1888. d. 1064. Legi*  
**GEOMETRYA**  
D L A  
**SZKÓŁ NARODOWYCH** *1910*

**C Z Ę Ś Ć I.** *-II*

*Drugi raz wydana.*

---

Bez oprawy      Zł:      3.

---



W KRAKOWIE 1785. Roku

---

w Drukarni Szkoły Głównej Koronnej.



Dzielo: *Geometriá*, ułożoné przez J. P. Lhuillier  
Obywatela Genewskiego, w Towarzystwo Nauk  
w témże Mieście ustanowioné policzoné, które za  
ogłoszoném w Polsce, i obcych krajach Uczonych  
do pisania wezwaniem, z pomiędzy innych, po-  
twierdzenie i nagrodę odebrało, od Towarzystwa  
do Xiąg Elementarnych roztrząsioné, a przez J. X.  
Gawronskiego Kanonika Koadjutora Krakowskiego, Le-  
ktora J. K. Mci i w témże Towarzystwie zasiadają-  
cégo, na Polski język z Francuzkiego przełożoné,  
Szkołóm Narodowym do użycia, podług przepisów  
naszych, podaliśmy. W Warszawie dnia 30. Pa-  
ździernika Roku 1780.

IGNACY Xzę MASSALSKI Biskup Wileński, Pre-  
zydujący.  
MICHAŁ Xzę PONIATOWSKI Biskup Płocki.  
AUGUST Xzę SUŁKOWSKI Wda Kaliski.  
JOACHIM CHREPTOWICZ Podkan. W. X. Lit.  
MICHAŁ MNISZECH Sekretarz W. L.  
HIACYNT MAŁACHOWSKI Referend. Kor.  
IGNACY POTOCKI Pisarz W. W. X. Lit.  
ADAM Xzę CZARTORYSKI Gen. Ziém Pod.  
JĘDRZĘY MOKRONOSKI Gen. Inspek. Woysk Kor.  
STANISŁAW Xzę PONIATOWSKI Gen. Lieut. W. K.  
FRANCISZEK BIELIŃSKI Star. Czérski.  
ANDRZĘY ZAMOYSKI Kawal. Ord. Orła Białego



910205  
I 11



\*—————W—————\*

ZBIÓR RZECZY ZAWARTYCH  
W ROZDZIAŁACH TĘJ XIĘGI.

\*—————\*

ROZDZIAŁ I. *Wiadomości początkowe  
o Liniach prostych, o Obwodzie koła, i  
o Kątach,* - - - - - Karta. 1.

ROZDZIAŁ II. *O przystawianiu Trójkątów, z przystosowaniem do rozwiązania wielu Zagadnień.* - - - - - 14.

ROZDZIAŁ III. *O Liniach równoległych, i o Równoległobokach* - - - - - 38.

ROZDZIAŁ IV. *O Kątach w Figurach prostokręślnych, a w szczególności w Trójkątach* - - - - - 47.

ROZDZIAŁ V. *O Równoległobokach, i Trójkątach równych co do Powierzchni, i o zamienieniu jakiejkolwiek Figury prostokręślnéj na Trójkąt, i na Równoległobok.* 57.

Przygotowanie do Rozdziałów następujących. *O podniesieniu liczby do Kwadratu, i wyciągnięciu z niej pierwiastku Kwadratowego.* - - - - - 78.

ROZDZIAŁ VI. *O Dodawaniu, i odejmowaniu Kwadratów, i zamienianiu ich, na jakiejkolwiek Figury prostokręślné* - 108.

RO-



ROZDZIAŁ VII. O Liniach stycznych  
z kołem; o Kątach przy okręgu Koła; i o Kątach, których wierzchołki są między okręgiem, albo za okręgiem 132.

ROZDZIAŁ VIII. Wstęp do Proporcji, przez przykłady Geometryczne, z przystosowaniem w szczególności do Trójkątów podobnych, a w ogólności do innych Figur prostokreślnych, także podobnych - 153.

ROZDZIAŁ IX. O stosunkach powierzchni Figur prostokreślnych w ogólności a w szczególności o stosunkach Figur podobnych. 186.

ROZDZIAŁ X. O Wielokątach foremnych. 220.

Wstęp do Rozdziałów XI, i XII. O używaniu Przenośnika, cyrkla proporcjonalnego, i podziela nazwanym Nonniuszem. 233.

ROZDZIAŁ XI. Pierwsze początki Miernictwa. 249.

Przygotowanie do Rozdziału następnego. O Logarytmach. 270.

ROZDZIAŁ XII. O Trygonometrii 289.

PRZYDATEK I. Przystosowania Trygonometrii do różnych działań na gruncie. 327.

PRZYDATEK II. Pierwsze początki równoważenia. 343.

ROZDZIAŁ XIII. O Kwadrowaniu koła, czyli o wynalezieniu Powierzchni Koła. 354.

SŁO.

stów  
śmy s  
wzglę  
rzecz  
wy O



## SŁOWNICZEK GEOMETRYCZNY,

Zamykający w sobie słowa nowe, albo mniej znane, użyte w tęg Xiedze, z przydanemi obok słowami Łacińskimi toż samo w używaniu Matematyków znaczącemi. \*

Bezśrzednie	<i>Immediate.</i>
Bok	<i>Latus</i>
Cécha	<i>Characteristica</i>
Céłowniki	<i>Dioptrae</i>
Cięciwa	<i>Chorda</i>
Czworokąt	<i>Quadrilaterum.</i>
Dopełnienie	<i>Complementum.</i>
Dostawa	<i>Cosinus</i>
Dosieczná	<i>Cosecans.</i>
Dostyczna	<i>Cotangens.</i>
Dowodzenie	<i>Demonstratio.</i>
Forémny	<i>Regularis</i>
Jłóść	<i>Quantitas</i>
Kąt	<i>Angulus.</i>
Kąt ostry	<i>Angulus acutus.</i>
Kąt prosty	<i>Angulus rectus.</i>
	Kąt

---

\* W niektórych mieyscach, w wykładzie słów łacińskich na swoyskie nie trzymaliśmy się słownego tłumaczenia, ale mieliśmy wzgląd na wyraż i bliższy do dokładnego rzeczy wystawienia, i stosowniejszy do mowy Oczystey.



Kąt rostawy	<i>Angulus obtusus</i>
Kąt wewnętrzny	<i>Angulus internus</i>
Kąt zewnętrzny	<i>Angulus externus</i>
Kąt wyskakujący	<i>Angulus saliens</i>
Katomierz	<i>Graphometrum</i>
Kąty na przemian	<i>Anguli alterni</i>
Kąty przyległe	<i>Anguli adjacentes</i>
Kąty przeciwne w wierzchołku	<i>Anguli ad verticem oppositi.</i>
Koło	<i>Circulus</i>
Kołowy	<i>Circularis</i>
Kwadrat	<i>Quadratum</i>
Kwadrat ukośny	<i>Rhombus</i>
Kwadowanie	<i>Quadratura</i>
Łuk	<i>Arcus</i>
Następnik	<i>Consequens</i>
Na odwrot, albo od- wrotnie	<i>Inverse albo in rati- one inversa</i>
Niespółmierny	<i>Incommensurabilis</i>
Obwód	<i>Perimeter</i>
Odcinek	<i>Segmentum</i>
Odwrotny	<i>Inversus.</i>
Okrąg	<i>Circumferentia.</i>
Opisać	<i>Inscribere</i>
Oś	<i>Axis</i>
Ostrokątny	<i>Acutangulum</i>
Pamiętnik	<i>Memoriale</i>
Pierwiastek	<i>Radix</i>
Pięciokąt	<i>Pentagonum</i>
Pion	<i>Perpendicularum</i>
Pionowy	<i>Verticalis.</i>
Podanie	<i>Propositio</i>
Podstawa	<i>Basis</i>
Podziałka	<i>Scala</i>



Poprzednik	<i>Antecedens</i>
Pośrednie	<i>Mediate</i>
Powierzchnia	<i>Superficies</i>
Powietrzniá	<i>Atmosfera</i>
Poziemnie	<i>Horizontaliter</i>
Poziomy	<i>Horizontalis</i>
Prawidło	<i>Alidada, albo Regula</i>
Promień	<i>Radius</i>
Prostokąt	<i>Rectangulum</i>
Prostokątny	<i>Rectangulum n p. Tri-</i> <i>angulum</i>
Prostokréslny	<i>Rectilineus</i>
Prostopadłe	<i>Perpendiculariter</i>
Prostopadły	<i>Perpendicularis</i>
Przeciwprostokątná	<i>Hypothenusá</i>
Przedmiot	<i>Obiectum</i>
Przekątná	<i>Diagonalis</i>
Przenośnik	<i>Transportator</i>
Przypuszczenie	<i>Suppositio</i>
Przystawanie	<i>Convenientia</i>
Ramię kąta	<i>Crus Anguli</i>
Rozprawa	<i>Dissertatio</i>
Rozwartokątny	<i>Obtusangulum</i>
Równoboczny	<i>Æquilaterum</i>
Równoległobok	<i>Parallelogrammum</i>
Równoodległa	<i>Parallela</i>
Równoodległe	<i>Parallelæ</i>
Równowaga	<i>Libella</i>
Równoważenie	<i>Libellatio</i>
Różnoboczny	<i>Scalenum</i>
Rozwiązanie	<i>Solutio</i>
Sieczná	<i>Secans</i>
Skrajny	<i>Extremus</i>
Spełnienie	<i>Supplementum</i>

Spół-

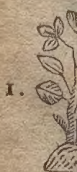


Spółmierny	<i>Commensurabilis</i>
Spółśrodkowy	<i>Concentricus</i>
Szrednica	<i>Diameter</i>
Szrodek	<i>Centrum</i>
Stanowisko	<i>Statio</i>
Stolik Geometryczny	<i>Tabula Praetoriana</i>
Stopień	<i>Gradus</i>
Stósunek	<i>Ratio</i>
Stósunek dwudzielny	<i>Ratio subduplicata</i>
Stósunek dwumno- żny	<i>Ratio duplicata</i>
Stósunek składany	<i>Ratio Composita</i>
Styczna	<i>Tangens</i>
Sześciokąt	<i>Hexagonum</i>
Tosamość	<i>Identitas</i>
Trójkąt	<i>Triangulum</i>
Twierdzenie	<i>Theorema</i>
Twierdzenie przy- brane	<i>Lemma</i>
Ukośny	<i>Obliquus</i>
Warunek	<i>Conditio</i>
Wierzchołek	<i>Vertex</i>
Wieszadło	<i>Pendulum</i>
Wniosek	<i>Corollarium</i>
Wpisać	<i>Inscribere</i>
Witawa	<i>Sinus</i>
Wykładnik	<i>Exponens</i>
Wyprostowanie	<i>Rectificatio</i>
Zasada	<i>Principium</i>
Zagadnienie	<i>Problema.</i>



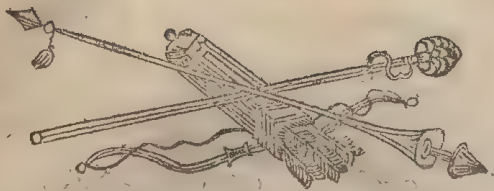
część I.

Wia  
styc



i wpra  
strzelba  
tak spo  
sobie d  
nia ich





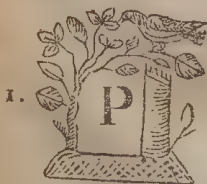
# GEOMETRYI

## CZĘŚĆ PIERWSZA

O Liniiach i powierzchniach.

### ROZDZIAŁ I.

Wiadomości początkowe o Liniiach prostych, o Obwodzie Koła, i o Kątach.



I. odróżny umiejący rachować kroki swoje, potrafi dochodzić iak długą była droga ta, którą odprawił. Strzelec doświadczeniém i wprawą częstą nauczony, osądzi łatwo, jeżeli strzelba jego do zamierzonego doniesie celu. Obadwa tak sposobią się do pewniejszego wyobrażenia sobie długości i odległości, to jest: do porównania ich z temi, które już dobrze poznali i wyznaczy-

A

czy-



## 2 GEOMETRYI CZĘŚĆ I. ROZDZIAŁ I.

czyli. Krok jest taką dła podróżnego długością, a średnia strzelby donośność; słuszny myśliwemu do wymiaru innej odległości.

Té proste, i inne, im podobne sposoby wyobrażenia sobie długości niewiadomych, użyteczne są w wielu bardzo okolicznościach życia; gdzie potrzeba osądzenia prętkiego, innych dokładniejszych użyć nie pozwalają. A ponieważ przez częste sposobów takich używanie, uczymy się chronić tych omyłek, w któreśmy w szczególnych razach wpadać zwykli byli; nie od rzeczy więc będzie wprawiać i tak oko uczących się, tyle jednak, ile to zgodzić się może z publiczną edukacją.

Ale iakiężkolwiek w téj mierze łatwości nabiorą uczniowie przez częste wprawiania się; chybić wszelako będą w porównywaniu długości bardzo wielkich, lub bardzo małych. Oprócz tego, każdy w szczególności człowiek, używając sposobu wyżej wspomnianego; różniby ieden od drugiego czynił wyznaczenia iednéjże nawet długości; a zatem trudnoby ludzie iedni z drugimi zrozumieć się w téj mierze mogli, gdyby się pierwszego tego w wyznaczaniu długości sposobu trzymali.

2. Z téj pobudki udano się do ustanowienia umówionéj pewnéj długości, którą



### Wiadomości początkowe o Liniach 3

ra na samo weyzrzenie, dokładnie sobie wyobrazić można było. Do tęj stósowa; no wszystkie inne długości niewiadome, które poznać chciano, i dochodzono ich, przykładając wiadomą długość do niewiadomych; długość takową nazwana jest *Miarą*.

3. W jednymże kraju, nie jedna Miara zwykła być używana, według różnych okoliczności, które się do iey użycia zdarzają. W Polsce na przykład kupieckie niektóre towary, i pomniejszych na ziemi długości łokciem podzielonym na całe i linie mierzyć się zwykły. Gdy zaś znaczniejszą jaką długość wymiérzać na ziemi trzeba; używamy do tego sążnia z trzech łokci złożonego, albo pretu zawierającego 7.  $\frac{1}{2}$  łokci, a jeszcze lepiej sznura, który 10. pretów zamykają.

Ponieważ te ostatnie miary nic nie są innego, tylko łokieć kilka razy przydany; dosyć więc będzie wielkości łokcia dokładne sobie wyobrażenie uczynić, aby dokładnie poznać i wielkość miar większych od łokcia. Wszystkie te słowa: *Sznur*, *Pret*, *Sążeń*, *Łokieć* i t. d. byłyby tylko słowami próżnemi i bez zrozumienia, gdybyśmy dokładnego nie mieli wyobrażenia, iedney z tych miary, na przykład łokcia; bo wszystkie nasze wyobrażenia, które o wielkościach mamy, są tylko *względne* (relativae) iedne do drugich.

Az 4. Kra-



#### 4 GEOMETRY CZĘŚĆ I. ROZDZIAŁ I.

4. Kraie różne odmiennych też miar zażywają: a co jeszcze w opaczne rozumienie wprowadzić może, miary te lubo odmiennie, jednémże słowem często się wyrażają. (a) I tak łokieć Litewski jest  $\frac{1}{10}$  większy od łokcia Koronnego; a zatem i inne Litewskie miary, w które łokieć wchodzi, większe będą od miar Koronnych. Łokieć Francuzki, dwa razy prawie jest od Polskiego większy. Miła Niemiecka, zawiera prawie  $1\frac{2}{3}$  mili Francuzkiej, a mila Angielska trzecią tylko jest Francuzkiej mili częścią. (Obacz w 3. Części Arytmetyki, na karcie. 276.

5. W przypadkach, o których mówiliśmy, na samą tylko względ miało się długość, wielkości tych, któreśmy uważali. W takowym razie mówić się zwykło, że się samemi liniami zaprzatamy, a w szczególności liniami prostymi, gdy te wyznaczają odległość, albo najkrótszą drogę od jednego z nich końca do drugiego. Gdyby zaś w tychże sa-  
mych

---

(a) Matematycy z wielką usilnością szukali miary jednostajnej, do której można by było stosować wszystkie inne. Rozumieć oii; iż ją znaleźli. w długości *Wieszadła prostego* (*Pendulum simplex*) ustawionego w miejscu wolném od zawad, i na powietrzu pomarkowanym; ale ta materyja należy do Fizyki.

### *Wiadomości początkowe o Linijach*

mych liniach bączył kto szczególniej to miejsce, gdzie się linią zaczyna, albo gdzie się kończy, lub gdzie iedną drugą przecina; wtedy mówiłoby się, że się zaprzęta około Punktu. (b)

6. Przez ieden punkt można tylé liniy rzeczą samą, albo przynajmniey myślą poprowadzić, ilé kto zechce. Ale gdy i drugi Punkt ieszcze, w jakieykolwiek od pierwszego odległości, będzie wyznaczony, przez który linią prostą má przechodzić; w tym razie położenie téyże linii, już się wyznacza; albo, co na iedno wychodzi, wszystkie Linie proste, któreby kto przez dwa Punkta dane poprowadził, nie będą tylko iedną i tą samą Linią. A zatém, gdy dwie Linie proste schodzą się, lub przecinaia, nie mogą tylko Punkt ieden mieć spólny. Gdy się mówić będzie w szczególności o wymierzaniu na ziemi, powiemy tam, iaką ostrożność mieć potrzeba, gdy wyznaczyć i wymierzyć przychodzi Linią łączącą dwa Punkta, których odległość iest wielką.

7.

---

(b) Nie trzeba tych wyrazów mieć za Definicje, ale tylko za szczéré objaśnienia i wytuszczenia wyobrażeń, które do tych słów zwykliśmy przywijać. Im więcéy kto zastanawia się nad początkami, na których zasadza się nasze wiadomości; tym większą postrzega trudność w ich wyłożeniu.



## 6 GEOMETRII CZĘŚĆ I. ROZDZIAŁ I.

7. Na papierze, aby złączyć dwa Punkta przez Linią prostą, używamy narzędzia, które się nazywa *Liniatorem* (Regula) nie spuszczaiąc się na samą rękę i oko; i przystawiwszy ten Liniat do dwóch wyznaczonych Punktów, kreślimy piórem, lub ołówkiem Linią podaną.

Oprócz wymiaru Linii prostych, przypada często zatrudniać się położeniem ich, jednych względem drugich.

8. Gdy dwie Liniie, mają Punkt wspólny, mogą być do siebie nachylone rozmaitemi sposobami. Abyśmy tę wielość położenia ich, jednych względem drugich dobrze pojęli; wystawmy sobie Linią jedną prostą na stole na przykład wrytą, i drugą na niej naprzód położoną, i zupełnie do niej przystającą, a potem obracającą się około Punktu wyznaczonego, któryby tym obudwóm Linióm był wspólny. W takowem obracaniu się, drugą Linią odmiennie coraż położenia i nachylenia mieć będzie względem pierwszej. Te rozmaite nachylenia nazywają się *Kątami* (Anguli) Punktu, około którego ta druga Linią obracała się, nazywa się *Wierzchołkiem kąta*, (Vertex Anguli.) Liniie, które nachyleniem swoim ten kąt czynią, nazywać można *Ramionami* (po Łacinie zowią takowe *Crura*.) Pod czas obracania się tej Linii, Punkt którykolwiek

### Wiadomości początkowe o Liniiach 7

wiek w nięj naznaczony, w jednakiey zawsze odległości będzie od tego Punktu, około którego statecznie się Linia obraca: a zatem i wszystkie Punkta śladu od nięj zostawionego, iednakowo będą odległe od tego Punktu nie wzruszonego. Jeżeli obracająca się Linia zupełny obrot uczyni, że znowu do pierwszego położenia, skąd się obracać zaczęła, powróci; ślad taki od tegoż samego Punktu zostawiony, nazywa się *Okręgiem koła*, (*Circumferentia Circuli*) Własność Okręgu stąd wypływająca; iest ta: że każdy w nim znajdujący się Punkt, w równęj od iednego Punktu zostaje odległości; a ten Punkt nazywa się *Śrzedkiem*. (*Centrum*.) Odległość śrzedka od któregokolwiek Punktu Okręgu, nazywa się *Promieniem*. (*Radius*) Część Okręgu, nazywa się *Łukiem* (*Arcus*), a Linia prosta łącząca końce dwa Łuku, nazwać się może *Cięnciwą*. (*Chorda*.) Gdy Cięnciwa ta przechodzi przez śrzonek Okręgu: a zatem dwa razy większa iest od promienia, zwacia będziemy *Śrzednicą*. (*Diameter*.) Jeżeli ona okrag koła, na dwie równé części, które tēm tylko różnią się, że iedna z jedney, a druga z drugiey strony Śrzednicy iest położona, (c)

9.

---

(c) Chcąc na papierze nakręślić Okrag koła, którego śrzonek i promień mamy wyznaczony; używamy do tego narzędzia nazywanego pospolicie *Cyrklem* (*Circinus*.)



## § GEOMETRYI CZĘŚĆ I. ROZDZIAŁ I.

9. Po tych Definicjach, (które objaśnić należy ręcznem działaniem tego, co wyrażają) pojdźmy do wyłożenia położenia kątów, z którego pochodzą.

Jeżeliby Linią ruchomą, odprawiła obrotem swoim, połowę, trzecią część, czwartą, piątą i t. d. téj całej drogi, którą ię obeysdź trzeba było, aby do pierwszego swego położenia powróciła; Punkt też którykolwiek téj Linii, odprawił tém samym połowę, trzecią część, czwartą, piątą okręgu zupełnego, któryby ta Linią zrobiła w koło się obróciwszy. Skąd wynika, że wierchołek kąta obrówszy za szrodek, i od niego jakimkolwiek promieniem łuk nakreśliwszy; któryby między ramionami kąta zamykał się; wielkość tego łuku koła, względem całego okręgu, do którego należy, da nam poznać wielkość kąta, względem całego tego miejsca kątownego (Angularis) któreby iedna z tych dwóch Liniy przeszła, zaczynając się obracać wtedy, gdy na drugiey leżała, a nie kończąc się obracać, aż znowu do nięj przystanie. I przeto łuk ten nazwany jest Miarą (d) kąta między dwó-  
ma

---

(d) Ten wyraz *Miara* nie kładzie się tu w ścisłym rozumieniu; miara albowiem iakięj ilości wiążcie się wziętą, powinna być tego gatunku, którego jest ta ilość, którą się mierzy: na przykład długość iedna mie-

## Wiadomości początkowe o Liniiach. 9

ma ramionami zamkniętego; a zatem tak łuk ten, iako i kąt, jednakowo się powiększa, albo zmniejsza, to jest: stają się razem podwójnemi, potrójnemi i t. d.

10. Stąd się okazuje, że wielkość kąta od długości ramion jego nie zawisła: (uwaga to jest, nad którą dobrze zastanowić się potrzeba.)

11. Aby sposobem wygodnym wielkość każdego kąta wyznaczyć przez wielkość łuku między jego ramionami zamkniętego, którego promień jest dany; zgodzono się na podzielenie okręgu iakiegożkolwiek na 360. części równych, z których każda nazywa się *Stopniem* (Gradus.) Przeto jeżeli łuk zamknięty między ramionami kąta, ma w sobie 20, 30, 40, i t. d. części takich, iakich okrag cały ma 360; o tym także kącie mówią, że ma 20, 30, 40. i t. d. stopniów. (e)

Na

---

rzy się przez długość inną. Łuk, zaś kąt i kąt, są gatunku różnego, a zatem łuk koła miarą kąta właściwie wziętą być nie może.

(e) W działaniach większej dokładności wyciągających, dzielą jeszcze każdy stopień na 60. części nazwanych *Minutami*, a każdą minutę na 60. *minut drugich* (Minuta secunda, albo *jednem słowem*, secunda.)

Znak stopniów, jest: o nad liczbą stopniów napisane. o o o o

Tak n. p. 20, 21, 30, 31, i t. d. wymawia się: dwadzieścia, dwadzieścia iedna i t. d. stopniów.



## 10. GEOMETRYKI CZĘŚĆ I. ROZDZIAŁ I.

Na tym gruncie zasadzą się cała robota i używanie narzędziów zdalnych do mierzenia kątów na ziemi, i sposób robienia tychże kątów na papierze, któreby iakąkolwiek stopniów podaną liczbę zawierały. O narzędziach tych mówię potem będziemy.

Dla uniknięcia długości, którąby obszerne każdego działania wykładanie za sobą pociągało, i aby natężeniu myśli pofolgować, zgodzili się Matematycy na pewne nazwiska Punktów, Liniiów, Kątów i t. d. około których maia do czynienia,

12. Punkt oznaczają przez iedną tylko literę, n.p. A.B.C.D. i t. d. gdy położenie tego punktu iest wiadome: a n.p. przez x, y, z, gdy nie wiedzą, ale dopiero szukają iego położenia.

Do oznaczenia Linii używają liter, które na dwóch iey końcach kładą, ieżeli iest wielkości ograniczoney: ieżeli zaś w wielkości swojej nie iest ograniczona, tedy na nię dwa punkta stanowią, i przy nich piszą dwie litery, któremi ją mianują. Tak n.p. Linia łącząca dwa punkta A i B oznaczona byłaby

Tab. I.

Fig. 1.

temi dwiema złączonemi literami AB.  
Dla oznaczenia kąta (ponieważ ten czynią dwie Linie do siebie się nachylające)

### Wiadomości początkowe o Liniach 11

iące) kładą trzy litery, jedną przy wierzchołku kąta, drugą i trzecią przy końcu ramion tego kąta: a złączwszy je razem, i w środku ich położywszy literę nad wierzchołkiem kąta napisaną, trzema temi literami kąt wyrażają. Tak n.p. kąt zrobiony przez dwie Liniie CA. Tab. 1. CB. oznaczyliby jednym z tych dwóch Fig. 2. wyrazem: ACB. albo BCA. Gdy wierzchołek nie należy do więcej iak do jednego kąta, dosyć będzie oznaczyć kąt tą jedną literą, która jest nad wierzchołkiem jego.

13. Kiedy ramię ruchome przez obrot swój, którymeśmy początek kątów objaśnili, uchodzi tylko czwartą część całego okręgu: zrobi takim obrotem swoim dwa kąty równe z tą Linią, około której się obraca, gdy tę drugą dalej pociągniemy. Te kąty nazywają się *Prostemi* (*Anguli recti*), łuk koła, który im za miarę służy, będzie miał w sobie 90. stopni, sama zaś Linią ruchomą, będzie w ten czas *Prostopadłą* (*perpendicularis*) względem drugiej. (Obacz w pierwszcy części Aarytmetyki na kartcie 87.)

Tab. 1.  
Fig. 3.

Gdy to samo ramię ruchome obrotem swoim nie dochodzi czwartej części okręgu; wtedy kąty między nim i drugim ramieniem przedłużonem uczynione, będą nie równe. Jeden mniejszy będzie od pro-



12 GEOMETRII CZĘŚĆ I. ROZDZIAŁ I.

prostego, a drugi większy. Te dwa kąty nazwane są *Przyleglłemi* (*Adjacentes*), albo (*deinceps positi*). Mniejszy od prostego zowie się *Oстрыm* (*acutus*) większy zaś od prostego, *Roztwartym* (*obtusas*) a jedna z tych Linii nazywa się *Pochyłą* (*obliqua*) do drugiej. Kąty DCA. DCB. są nierówne; kąt DCB. jest ostry, a kąt DCA. roztwarty, Linia DC. pochyła do Linii AB.

Tab. I.

Fig. 4.

14. Summa dwóch kątów przyległych, równa się dwóm kątóm prostym.

Niech będzie DC. pochyła do AB. summa kątów: DCB. DCA. równa jest dwóm kątóm prostym.

Jakoż, gdyby Linia DC. zrobiwszy obrotém swoim około Punktu C. kąt BCD, dalej się jeszcze obracała, ażby naostatkiem przystała do linii CA; byłaby obrotém; takim przeszła dwa kąty proste, ale też razem byłaby przeszła i kąty BCD, i DCA; więc te dwa kąty są dwiema częściami summy z dwóch kątów prostych złożonę, a zatem równała się dwóm kątóm prostym.

15. Gdyby Linia CD, była pociągnięta na drugą stronę linii AB, na przykład aż do E; kąty BCD, ACE, nazywałyby się, ieden względem drugiego *Przeciwnymi w wierzchołku* (*Cad Verticem oppositi*)

siti): mają one wierzchołek C. spólny, a ramiona CA, CE, jednego z tych kątów, są przedłużeniem ramion CB, DC, drugiego.

16. Kąty w wierzchołku przeciwległe są równe.

Jakoż w samę rzecz kąt: BCD, ACE, mogą być uważane, iak gdyby się zrobili z obracania się Linii ED, około Punktu niewzruszonego C, zaczynając ten obrot, gdy Linia ED, na Linii AB, leżała, aż do położenia iey na CE. Tym sposobem Linia ED, przez taki swój obrot nachyli się do Linii AB, równie z jednej iak i z drugiej strony, a zatem czyni równe kąty DCB, ECA.

Wszystkie te Podania (Propositiones) któreśmy dotąd przytoczyli, powinny być objaśnione, wykonywając ié, przez działania ręczne, na których się zasadzaia. (f) RO-

(f) Niech się nie obawiają Nauczyciele żadnych zarzutów, gdy przez ruch linii tłumaczyć i objaśniać będą wiele prawd Geometrycznych Ucznióm swoim dopiero począłaiącym. Dalecy oni są jeszcze, aby w téj materii domyslać się mieli subtelności Metafizycznych. Czynię pod ich oczami działania około tych rzeczy, któremi się zatrudniać mają, i zmysły ich na nie obracać, iest to jeden z najsukuteczniejszych sposobów, baczność w nich, i uwagę do rzeczy przywiązać, a razém i natężeniu myśli pofolgować.



## ROZDZIAŁ II.

Ó przystawianiu Trójkątów,  
z przystósowaniem do rozwią-  
zania wielu Zagadnień.

17. *Definicje:* Mieyscé zakończone trzema Liniami prostemi, zowie się Trójkątem prostokreślnym ( *Triangulum rectilineum.* ) My samego przez się słowa Trójkąt używać będziemy. Linie trzy, w których się Trójkąt zamyka, zowiemy Bokami Trójkąta ( *Latera Trianguli.* ) Takie Linie zowią także ścianami. Tego nazwiska do innego potém znaczenia użyjemy. *Przystawianie,* ( *Convenientia* ) i przypadanie Figur jednych do drugich, na którym równość dwóch iakich Powierzchni zakładamy, używane jest często w pospolitych życiá ludzkiego potrzebach i wygodach. Na obicie na przykład pokoiów, bierzemy tyle płótna, lub inney iakięj materyi, ile wystarczá na przykrycie ścian tego: i wielkość powierzchni tego obicia, nie różni się od ścian powierzchni, które pokrywá tylko tém, że ściany są pod obiciem, a obicie na ścianach. Toż mówić o deskach wystarczających na podłogę, albo o szybach do okien i t. d. Krawcy o to się stárájá, aby tak suknie lub inne odzienia wymierzali, żeby té przystawały iak náylepięj do tych ciała części, które pokrywac maia. Dwie

Xięgi

## O przystawianiu Trójkątów 15

Kiegi jednakowego dzieła, dwa obrazy pod jednakowemi wymiarami odmalowane, nie różnią się co do powierzchni, tylko tem, że nie są jedną rzeczą, ale dwiema. Miary na zboże, napoje, i t. d. tak się zgadzają z sobą, że jedna prawie wielość ziarna pewnego, napelnia korzec ieden, iako i drugi; tyle w jeden garniec, co i w drugi mieści się napoju i t. d. gdy te miary stósują się do iednej ustanowionej od Zwierzchności.

**18. Twierdzenie (Theorema).** Jeżeli w dwóch Trójkątach, dwa boki w jednym, równe są dwóm bokom drugim, i kąty między temi bokami zawarte równe, trzeci też bok iednego, równy będzie trzeciemu bokowi drugiego; i kąty przy tych bokach równych będą, w jednym i w drugim Trójkącie będą równe.

Niech będą dwa Trójkąty:  $ABC$ ,  $abc$ ,  
 których boki:  $AC$ ,  $ac$ , są równe, boki  
 też  $BC$ ,  $bc$ , równe i kąty:  $C$ ,  $c$ , równe.  
 Dowieść trzeba, że i boki:  $AB$ ,  $ab$ , i  
 kąty  $A$ ,  $a$ , iako też  $B$ ,  $b$ , będą równe.

Táb. I.  
Fig. 5.

**Dowodzenie (Demonstratio.)** Wystawmy sobie Trójkąt:  $abc$ , iakoby oderwany (co też odstrzygszy go, i w rze- czy samy wykonać można) i przeniesiony na Trójkąt:  $ABC$ , w ten sposób, aby położywszy linią  $ca$ , na linii  $CA$ , linią też  $cb$ , przystała do linii  $CB$ , (co dla ró-

wno



## 16 GEOMETRYI CZĘŚĆ I: ROZDZIAŁ II.

wności kątów  $C$ , i  $c$ , nastąpić powinno.)  
Ponieważ linią  $ca$ , równa jest linii  $CA$ ;  
a linią  $cb$ , linii  $CB$ , Punkta  $a$ , i  $b$ , przy-  
padną na punkta  $A$  i  $B$ ; a zatem i linie  
 $ab$ , i  $AB$ , będą przez te same punkta  
zakończone. Więc te dwie ostatnie li-  
nie przykryją się zupełnie jedna drugą;  
a zatem będą równe, i zrobią z linia-  
mi  $ca$ ,  $CA$ ,  $cb$ ,  $CB$ , kąty równe  $a$ , i  $A$ ,  
iako też  $b$ , i  $B$ .

19. Uwaga. Dwa Trójkąty  $cab$ ,  $CAB$ ,  
nie różnią się od siebie, tylko przez to,  
że odmiennie miejsce zastępują. O takich  
więc dwóch Trójkątach, a w powsze-  
chności i o każdych dwóch figurach, sa-  
mém tylko położeniem miejsca różnią-  
cych się mówimy, że do siebie przysta-  
wać mogą.

20. Przystosowanie: Jeżeli w jednym  
Trójkącie, dwa boki są równe, będą też  
równe i dwa kąty przy nich leżące.

Tab. I. Niech będzie Trójkąt  $ABC$ , którego  
Fig. 6. boki  $AC$ ,  $BC$ , są równe; kąty też  $A$  i  $B$ ,  
będą równe.

Wystawmy sobie, że ten Trójkąt  $ABC$ ,  
wybity jest na drugim miejscu tak, że-  
by bok  $CA$ , w wybitym Trójkącie, to-  
 miał położenie, co bok  $CB$ , w Trójką-  
cie pierwszym, a znowu bok  $CB$ , aby  
w drugim, na téj stronie leżał na której  
bok  $CA$ , w pierwszym; ponieważ kąt  $C$ ,  
jest jednakowy w obudwóch tych Tró-  
kątach

17. 19  
kątach,  
na pier-  
ta wybi-  
 $CB$ , do  
 $CB$ , Tró-  
kta  $B$ ,  
tego, le-  
leżących  
drugi Tr-  
będzie n-  
kąty  $B$  i  
pierwszy  
Trójkąta  
podłożo-  
kątowi  $A$   
 $A$  i  $B$ ,  $T$   
kątowi  $A$   
nym; a z

Naste-  
dzenie, z  
czynający  
często za-  
go dowo-  
tność Uci-

Niech  
boki  $AC$   
 $CBA$ , bę-

Przyg-  
przedłużo-  
ie równe  
władzmy

19. przystawianiu Trójkątów 17

Wystawiając Trójkąt  $CAB$  na bokach  $CA$  i  $CB$ , położywszy tedy drugi Trójkąt na pierwszym; bok  $CB$ , i  $CA$ , Trójkąta wybitego przystanie zupełnie pierwszemu  $CB$ , do boku  $CA$ , drugi  $CA$ , do boku  $CB$ , Trójkąta pierwszego, a zatem i Punkt  $B$ , i  $A$ , należące do Trójkąta wybitego, leżeć będą na punktach  $A$ , i  $B$ , należących do pierwszego Trójkąta. Węć drugi Trójkąt przeniesiony na pierwszy, będzie mógł przystać do niego: a przeto kąty  $B$  i  $A$ , tego Trójkąta równe będą, pierwszy kątowi  $A$ , drugi kątowi  $B$ , Trójkąta podłożonego. A że kąt  $A$ , w tym podłożonym Trójkącie, jest równy także kątowi  $A$  drugiego Trójkąta, więc kąty  $A$  i  $B$ , Trójkąta podłożonego są równe kątowi  $A$ , w Trójkącie na nim położonym; a zatem kąty  $A$  i  $B$ , są sobie równe.

Następujące tegoż twierdzenia dowodzenie, zastanawia prawie wszystkich poczynających, i wielu jest zdania, lubo często zawodnego, że w zrozumieniu tego dowodzenia, daie się poznawać pojętność Ucznia i sposobność do Geometrii.

Niech będzie Trójkąt  $CAB$ , którego boki  $AC$ ,  $CB$ , są równe; kąty  $CAB$ ,  $CBA$ , będą też równe. Tab. I. Fig. 7.

Przygotowanie. Na liniach  $CA$ ,  $CB$ , przedłużonych, weźmy iakiekołwiek linie równe, na przykład:  $AD$ ,  $BE$ , i poprowadźmy  $BD$ ,  $AE$ .

B      Dowa-



*Dowodzenie.* Ponieważ linie  $CA$ ,  $CB$ , są równe, a linie też  $AD$ ,  $BE$ , wzięte są równe; więc w Trójkątach:  $DCB$ ,  $ECA$ , gdzie kąt  $C$  jest spólny, ramiona  $CB$ , i  $CA$ ,  $CD$ , i  $CE$ , tego kąta równe będą; a zatem te dwa Trójkąty przystać do siebie mogą; (18) a w szczególności linie  $AE$ ,  $BD$ , i kąty przy  $D$  i  $E$ , równe będą.

W Trójkątach:  $ADB$ ,  $BEA$ , boki  $AD$ ,  $BE$ , są równe, dowiodło się też, że linie  $BD$ ,  $AE$ , są także równe; i że równe są kąty w tych ramionach zawarte przy  $D$ , i  $E$ ; więc te Trójkąty mogą do siebie przystać: a w szczególności kąty:  $DAB$ ,  $EBA$ , są równe, a zatem i im przyległe:  $CAB$ ,  $CBA$ , będą równe.

21. Gdyby wszystkie trzy boki w Trójkącie były równe; trzy także kąty w nim równoby były,

22. *Definicje.* Gdy w Trójkącie dwa boki są równe: taki Trójkąt zwiemy *Równoramiennym* (*Isosceles* albo *Aëquicrurum*.) Gdy w Trójkącie boki trzy będą równe; nazwiemy go *Równobocznym* (*aëquilaterum*.)

Gdy w Trójkącie wszystkie trzy boki nierówne będą, zwac go będziemy *Różnobocznym* (*Scalenum*.)

kąty, są  
kąty p  
równe  
boku r  
ci też k  
będzie  
dwa inn  
będą w

Nieci  
kątach:  
A i a,  
C, równ  
ki także

Dow  
kąt abc,  
i na nim  
postawi  
równa l  
waż kąt  
b, kątów  
linii AC  
e, musi s  
AC, i n  
się, będz  
Więc Tr  
Trójkąta  
równa b  
i kąt c,

24. l  
kacie, k  
są równ

## O przystawianiu Trójkątów 19

23; **Twierdzenie** 2. Gdy dwa Trójkąty, mają bok jeden równy, i gdy dwa kąty przy tym boku jednego trójkąta, równe są względem dwóch kątów przy boku równym drugiego Trójkąta; trzeci też kąt w jednym Trójkącie, równy będzie trzeciemu kątowi w drugim; i dwa inne boki, równe względem siebie będą w obudwóch tych Trójkątach.

Niechay na przykład w dwóch Trójkątach: ABC, abc, boki AB, ab, i kąty A i a, B i b, będą równe; będzie i kąt C, równy kątowi c; boki AC, ac, i boki także BC, bc, będą równe.

Táb. I.

Fig. 5.

**Dowodzenie.** Wystawmy sobie Trójkąt abc, przeniesiony na Trójkąt ABC, i na nim położony, tak, aby Punkt a, postawiwszy na Punkcie A, linią ab, równą linii AB, na nię leżała. Ponieważ kąt a, równy się kątowi A, i kąt b, kątowi B; linią też ac, przystanie do linii AC; a linią bc, do BC; Punkt tedy c, musi się znajdować razem i na linii AC, i na linii BC; a zatem znajdować się będzie na ich spólném przecieciu C. Więc Trójkąt abc, zupełnie przystanie do Trójkąta ABC, a przeto linie ac i bc, równe będą linióm AC, BC, tak, iako i kąt c, równy kątowi C.

24. **Przystosowanie.** Jeżeli w Trójkącie, kąty przy Podstawie (ad basim) są równe; taki Trójkąt będzie Równoboczny. Bz. ramień.

20 GEOMETRYI CZĘŚĆ I. ROZDZIAŁ II.

ramiennym. Dowodzenie tego podobne jest wcale dowodzeniu położonemu w przystosowaniu pierwszego Twierdzenia (20.) Jeżeli Trójkąt ma wszystkie trzy kąty równe, będzie Równobocznym.

25. *Twierdzenie 3.* Gdy w dwóch Trójkątach, boki trzy jednego, równe są trzem bokom drugiego; i kąty też trzy w jednym, będą równe trzem kątóm w drugim, a te dwa Trójkąty mogą przystać do siebie.

Táb. II.  
Fig. 1.  
i 2.

Niech będą dwa Trójkąty ABC, abc, takie, aby bok AB, w pierwszym równy był bokowi ab, w drugim, podobnie iak i boki AC, BC, równe bokóm ac, bc, te dwa Trójkąty mogą przystać do siebie.

*Dowodzenie.* Wystawmy sobie Trójkąt abc, przeniesiony i położony pod Trójkątem ABC, tak, iak go wyraża na figurze Trójkąt ABD. Poprowadźmy linią CD. Ponieważ linie CB, BD, są obiedwie równe linii cb, są też i sobie równe; więc i kąty: BCD, BDC, są równe (23.) Podobnie kąty ACD, ADC, są także równe: a zatem i kąty: ACB, ADB, równe będą.

Więc, dwa Trójkąty: ACB, ADB, mogą przystać do siebie. Ale że też Trójkąty: ABD, i abc, przystać do siebie

bie  
kąty

2  
że b  
nac  
albo  
któw  
prze  
toż s  
zach

27  
né d  
od k  
był o

R  
od d  
wadz  
kszy  
tam g  
da, k

28  
lubo  
się w  
nych  
po Ł  
go s  
oznac  
go do  
linij  
My p  
razach  
kręślen



## O przystawianiu Trójkątów 21

bie mogą; więc przystaną także i Trójkąty: ABC, abc.

26. *Uwaga.* Położenie linii CD, może być trojakié, bo może albo przecinać linią AB, między punktami A i B, albo może przez który z tych dwóch punktów przechodzić, albo nawet i przez przedłużenie téżże linii AB. Dowodzenie toż samo jest we wszystkich trzech razach.

27. *Zagadnienie.* (Problema.) Mając dane dwa Punkta, znaleźć trzeci, któryby od każdego z tamtych, w jednakowey był odległości.

*Rozwiązanie.* (Solutio.) Od iednego i od drugiego z punktów danych, poprowadziwszy łuk koła promieniem większym od odległości tych dwóch Punktów; tam gdzie się te dwa łuki przecinają będzie punkt, którego szukamy.

28. *Uwaga.* Na rozwiązaniu tego, lubo tak łatwego zagadnienia, zasadza się *Wykreślenie* Geometryczne wielu innych Zagadnień. Wykreślenie to zowią po Łacinie *Constructio*, lubo tego samego słowa zażywają także Matematycy na oznaczenie przygotowania poprzedzającego dowodzenie, przez kręślenie pewnych linii potrzebnych do tegoż dowodzenia. My przykładem ich, w obudwóch także razach, używać będziemy tego słowa *Wykreślenie*.

## 22 GEOMETRYI CZĘŚĆ I. ROZDZIAŁ II.

29. *Zagadnienie 2.* Daną linią prostą, podzielić na dwie części równe.

*Rozwiązanie.* Sposobem w poprzedzającym Zagadnieniu wyrażonym, znaydźmy po obadwóch liniach téj stronach dwa punkta, któreby od końców iey jednakowo były odległe; złączmy té dwa punkta linią prostą, ta przecinie w jednym punkcie linią daną, i w tém przecięciu będzie punkt podziału żadanego.

Tab. II.

Fig. 3.

Niech będzie linia daną AB, C Punkt równo-odległy od A i B, końców linii danej, D, drugi punkt, podobnie także odległy. Punkt X, gdzie linia CD, przecina linią AB, dzielić będzie na dwie równe części linią daną.

*Wykreślenie, (Constructio.)* Pociągniemy linie AC, BC, AD, BD.

*Dowodzenie.* Trójkąty CDA, CDB, mają trzy boki równe iedne drugim; a zatem (25.) mogą przystać do siebie, a w szczególności, kąt ACD, równy iest kątowi BCD. Więc Trójkąty ACX, BCX, mieć będą boki AC, i BC, równe, bok CX, spólny, i kąt także w tych ramionach zamknięty równy; więc (24.) té dwa Trójkąty mogą do siebie przystać, i linie AX, i BX, są równe.

30. *Defini.* Gdy w Trójkącie, albo w jakiejkolwiek innéj figurze, bok ieden

## O przystawianiu Trójkątów 23

den będzie przedłożony: kąt, który się między tém przedłożeniem i bokiem przyległym zrobi; nazywa się *Zewnętrznym* (*externus*) tego Trójkąta, lub innej figury.

31. *Twierdzenie 4.* W Trójkacie, zewnętrzny kąt większy jest od jednego z wewnętrznych na przeciwko niego położonych.

Niech będzie Trójkąt ABC, którego bok AB, przedłożony jest według upodobania ku D; kąt zewnętrzny CBD, większy jest niżeli jeden ze dwóch wewnętrznych, na przykład C.

*Przygotowanie.* Przetniemy na połowę w punkcie E, bok BC, i poprowadzmy linią AE, aż do F, aby FE, równała się AE; pociągniemy jeszcze i linią BF.

*Dowodzenie.* Trójkątów: AEC, FEB, kąty przeciwne w wierzchołku E, są równe, i ramiona tychże kątów równe, z wykreślenia. Więc dwa te Trójkąty, mogą do siebie przystać (18.) a w szczególności kąt C, równy jest kątowi EBF, który kąt EBF, jest tylko częścią kąta CBD. Przeto kąt cały CBD, większy jest od kąta C, równego kątowi EBF.

32. *Wniosek.* (*Corollarium.*) Summa dwóch jakichkolwiek kątów w Trójkacie,



#### 24 GEOMETRYI CZĘŚĆ I. ROZDZIAŁ II.

cie, mniejsza jest od dwóch kątów prostych. Ponieważ albowiem kąt  $CBD$ , większy jest od kąta  $C$ , Summa kątów  $CBD$ ,  $ABC$ , większa będzie od Summy kątów  $C$ , i  $ABC$ ; a że summa dwóch kątów pierwszych, waży tyle co dwa kąty proste, bo jest summa dwóch kątów przyległych (14) więc ta druga summa mniejsza jest od pierwszej.

Idzie zatem, że jeżeli w Trójkącie, będzie kąt jeden prosty, albo też rozwarty, dwa inne, nie mogą być tylko każdy z nich ostry,

33. *Definicje.* Jeżeli Trójkąt zawiera w sobie kąt prosty, zowie się *Prostokątnym* ( *Triangulum Rectangulum.* ) Jeżeli ma kąt rozwarty, nazwać go można *Rozwartokątnym* ( *Obtusangulum.* ) Jeżeli wszystkie trzy kąty ma ostre, zwać się będzie *Ostrokątnym* ( *Acutangulum.* )

34. *Twierdzenie 5.* Gdy w dwóch Trójkątach, bok jednego będzie równy bokowi drugiego, i kąt tym bokom przyległy równy jednemu drugiemu, a kąt nieprzyległy tym bokom, także równy w obu Trójkątach, dwa te Trójkąty mogą przystać do siebie.

Tab. II. Niech będą dwa Trójkąty  $ABC$ ,  $abc$ ,  
Fig. 4. mające dwa boki  $AB$ ,  $ab$ , równe, kąty  
 $A$ , i  $a$ , przy tych bokach równe, i kąty  
 $C$ ,

C, i c, równé. Té dwa Trójkąty mogą do siebie przystać.

**Dowodzenie.** Przenieśmy Trójkąt abc, na Trójkąt ABC, tak, aby bok ab, przystawszy do boku AB, bok téż ac przystawał do boku AC; (co dla równości kątów a, i A, nastąpić powinno.) Gdyby Punkt c, nie przypadł na punkt C, toby przypadł albo między punktami A i C, naprzykład na d, albo dalej za punktem C, na linii AC, przedłużonej, naprzykład na D; w pierwszym razie, kąt AdB, albo C, byłby zewnętrzny Trójkąta CBd, a zatem większy od kąta C. W drugim razie kąt C, byłby zewnętrzny Trójkąta CBD, a zatem większy od kąta D, albo c; co w obudwóch razach, jest przeciwko podaniu, bo kąty C, i c, dané, są równé. Więc linią ac, przeniesioną na AC, nie gdzie indziéy kończyć się będzie, iak na punkcie C, a zatem Trójkąty BAC, bac, mogą przystać do siebie. (18.)

**35. Twierdzenie 6.** W każdym Trójkącie, jeżeli bok ieden większy jest od drugiego; i kąt téż na przeciwko boku pierwszego, większy będzie od kąta drugiemu bokowi przeciwného.

Niech będzie Trójkąt ABC, którego Táb. II. bok AC, większy od boku BC; będzie Fig. 5. téż i kąt ABC, większy od kąta A.

**Przygotowanie.** Na boku AC, większym, weźmy CD równą CB, i od D poprowadźmy DB.

**Dowód.**

26 GEOMETRYI CZĘŚĆ I. ROZDZIAŁ II.

**Dowodzenie.** Trójkąt równoramienny BCD, ma kąty CBD, CDB, równe: kąt CDB jest zewnętrznym Trójkąta BAD; więc jest większy niż kąt A; a zatem i kąt CBD większy będzie od kąta A; dopiero kąt CBA większy jest od tegoż kąta A.

36. **Twierdzenie 7.** Gdy w Trójkącie, większy jest kąt jeden od drugiego; bok na przeciwko pierwszego kąta, większy też będzie od boku przeciwnego drugiemu kątowi.

**Dowodzenie.** Gdyby bok przeciwny pierwszemu kątowi, był równy albo mniejszy od boku drugiemu kątowi przeciwnego; pierwszy też kąt byłby równy drugiemu, albo od niego mniejszy. (35.) Ale przez podanie, ten pierwszy kąt nie jest ani równy, ani mniejszy od drugiego; więc też i bok temu pierwszemu kątowi przeciwny, nie będzie ani równy, ani mniejszy od drugiego boku; a przeto będzie większy od niego.

37. **Uwaga.** W tym twierdzeniu użyliśmy pierwszy raz dowodzenia *zboczne-go*, albo przez *niepodobność*. Po Łacinie piszący, nazywają takie dowodzenie: *Demonstratio indirecta*, albo *per absurdum*. Okazuje się tym sposobem, że wszelkie inne odmiennie w tej mierze utwierdzenie, byłoby fałszywem: a zatem to tylko jest prawdziwe, którego dowodzimy.



0 przystawaniu Trójkątów 27

38. *Wnioski.* Ponieważ w Trójkacie prostokątnym i w Trójkacie rozziwanym, kąt prosty, i kąt rozziwany, są z trzech kątów największymi; przeto też boki naprzeciwko takich kątów leżące, będą największe.

A stąd między wszystkiemi liniami poprowadzonymi od tegoż samego punktu, od iednej linii, najmniejsza jest linią prostopadłą. Inne linie pochyłe, tym większe będą, im dalsze od prostopadłej. Dwie także linie pochyłe, równey wielkości, od Punktu tegoż samego poprowadzić można; a nie więcej, i te od prostopadłej równie będą odległe.

Stąd też wypływa, że linią prostą, nie może przecinać okręgu koła w więcej, iak we dwóch punktach, a to w tych, których odległość od środka koła, równa się promieniowi tegoż koła: bo inaczej więcej niż dwie linie równé, można by poprowadzić od iakiego punktu do trzeciej linii.

39. *Defin.* Linią prostopadłą, spuszczoną od iakiego punktu na inną linią, nazywa się *odległością* tego punktu od linii, na którą spada: a to dla tego, że ta linia jest najkrótszą między wszystkiemi innemi, któreby od tegoż punktu można poprowadzić do tej samej linii.

40. *Twierdzenie. 8.* W Trójkącie summa dwóch boków, większa jest od boku trzeciego.

Tab. II. Niech będzie Trójkąt ABC, Summa  
Fig. 7. dwóch boków AB, BC, większa jest od boku AC.

*Wykreślenie.* Pociągnąwszy dalej bok AB, weźmy BD, równą BC, i złączmy ich końce linią CD.

*Dowodzenie.* W Trójkącie równoramiennym BCD, kąty C i D, są równe; więc w Trójkącie ACD, kąt ACD, większy jest od kąta D; a zatem i bok AD, większy będzie od boku AC: a że AD równa się summie boków AB, BC, więc i ta summa boków jest większą od boku AC.

41. *Uwaga.* To twierdzenie służyć nam może po części za objaśnienie w tém, które już mamy, naturalnym linii prostej wyobrażeniu. Widzimy tu oczywiście, że linią prostą, którą łączy dwa Punkta, inniejsza jest, niżeli summa dwóch innych linii do tychże Punktów poprowadzonych od punktu takiego, który się nie znajduje na linii łączącej te dwa punkta.

42. *Twierdzenie. 9.* Jeżeli od środka Linii prostej wyprowadzimy prostopadłą; każdy Punkt w téj prostopadłej, będzie

## O przystawianiu Trójkątów 29

będzie równo odległy od obudwóch końców linii pierwszej; każdy zaś inny Punkt za tą prostopadłą wzięty, nie jednakową od tychże końców odległość mieć będzie.

Niech będzie prostopadłą  $CD$ , do Tab. II.  
środku  $C$ , linii  $AB$ . Fig. 8.

*Naprzód:* Odległości  $DA$ ,  $DB$ , Punktu któregokolwiek  $D$ , wziętego na linii  $CD$ , od Punktów  $A$  i  $B$ , są równe.

*Dowodzenie.* W Trójkątach  $ACD$ ,  $BCD$ ; kąty proste przy  $C$ , są równe, i ramiona przy tych kątach równe; więc dwa te Trójkąty mogą przystać do siebie; a zatem linie  $AD$ , i  $BD$  są równe.

*Powtóre:* Niech będzie Punkt  $E$ , za prostopadłą  $DC$ , linie  $EA$ ,  $EB$ , nierówne będą.

Niech linią  $AE$ , przechodzi przez Punkt  $D$ , należący do prostopadłej  $CD$ ; od Punktu tego poprowadźmy linią  $DB$ .

*Dowodzenie.* Linie  $AD$ ,  $BD$ , są równe, tako się już dowiodło: więc linią  $AE$ , równą się summie Linii  $BD$ ,  $DE$ . A że w Trójkącie  $BDE$ , summa boków  $BD$ ,  $DE$ , większa jest od boku  $BE$ ; więc też linią  $AE$ , większa jest od linii  $BE$ .

Zwy+



Zwyczaju się króćcy jeszcze to twierdzenie tak wyrażać: *Linia prostopadła, z pośrodku innej linii wyprowadzona, jest miejscem (Locus) wszystkich punktów oddalonych jednakowo od obu końców tejże linii.* (g)

43. *Zagadnienie 3.* Od punktu danego na linii prostej wyprowadzić linią prostopadłą.

*Rozwiązanie.* Weźmy na danej linii dwa inne punkta, jednakowo od punktu danego odległe; od każdego z tych dwóch punktów, jako od środka (a centro) jednakowym promieniem, większym jednak, niż jest odległość tych dwóch punktów od punktu danego, narysujemy dwa łuki przecinające się. Punkt dany, i drugi w przecięciu znaleziony złączmy z sobą linią prostą, ta będzie prostopadłą, którąśmy szukali.

44. *Zagadnienie 4.* Od punktu danego za linią prostą, spuścić na nią linią prostopadłą.

Ro-

Ponieważ linia prosta, przez dane położona dwóch punktów, jest już tem samym wyznaczona; jeżeli tedy przez dwa inne punkta, których każdy jednakowo ma od obu punktów danych odległość, poprowadzić linię, ta w środku linii łączącej dwa punkta dane, będzie prostopadłą.

# O przystawianiu Trójkątów 31

**Rozwiązanie.** Znáydzmy dwa punkta na linii danéy, iednakowo odległe od punktu danego; kreśląc od niego iako od srzodka, iednakowym promieniem, dwa łuki przecinające we dwóch punktach linię daną; szukáymy inszego jeszcze punktu rownie od dwóch przecięcia punktów odległego. Linia łącząca ten punkt zaleziony, i drugi dany, jest ta sama prostopadła, któręysmy szukali.

45. **Zagádnienie 5. 1.** Na danéy linii wystawić Trójkąt równoboczny.

2. Na danéy linii wystawić Trójkąt równoramienny, którego ieden bok jest wiadomy.

3. Na danéy linii wystawić Trójkąt, którego dwa inne nierówne boki są wiadome.

**Rozwiązanie.** 1. Z dwóch końców linii danéy, promieniem równym téżże linii, pociągnąć trzeba po iednéy stronie dwa łuki, i punkt ich przecięcia złączyć z końcami linii danéy.

2. Z dwóch końców linii danéy, promieniem równym linii, która ma służyć za ramię Trójkąta równoramiennego, pociągnąć dwa łuki, i od punktu ich przecięcia poprowadzić dwie linie do końców linii danéy.

### 32 GEOMETRII CZĘŚĆ I, ROZDZIAŁ II.

3. Z dwóch końców linii daney, promienniami odmiennemi, równemi w długości liniom mającym służyć za boki do Trójkąta, pociągnąć dwa łuki, i od punktu ich przecięcia, poprowadzić dwie linie do końców linii daney.

*Przestroga.* Summa dwóch linii danych, powinna być większą od trzeciej linii także daney, (40.)

46. *Definicja.* Gdy uważamy Trójkąt, ile wystawiony jest na jakiej prostej linii; taką linią nazywa się *Podstawą* (Basis) Trójkąta, a kąt naprzeciwko iey stojący nazywamy *Wierzchołkiem* Trójkąta (Vertex Trianguli.)

47. *Przystósowanie.* Przerysować Trójkąt dany.

*Rozwiązanie.* Weźmy ieden z boków Trójkąta za Podstawę onęgo. Podstawę tę przenieśmy na inше miejsce, i od końców iey promienniami, dwóm innym bokom równemi, nakreślmy dwa łuki, a od punktu ich przecięcia, poprowadźmy dwie linie do końców podstawy; już tём samém przerysowany będzie Trójkąt dany, na inny iemu we wszystkiém równy.

48. *Zagadnienie 6.* Mając dany kąt iaki, zrobić mu drugi równy, któryby miał

miął  
wierz

Roz  
chołka  
iego r  
równie  
zrobi  
punkt  
nosi s  
mieniu  
podsta  
wszém

49.  
kąt, k  
i kąt p

2.  
podsta

50.  
które  
ki, ied  
gi nap

Uw  
roztwa  
dwóch  
danemu  
ku prz  
cim raz  
że byd  
giego.  
my kąt



miął za jedno ramię linią daną, a za wierzchołek punkt na téj linii także dany.

**Rozwiązanie.** Zaczynając od wierzchołka kąta danego, wzięść trzeba na jego ramionach dwie jakiegokolwiek linii równe i końce ich złączyć trzecią linią; zrobi się tym sposobem Trójkąt. Od punktu danego na linii także daney, przenosi się długość, wziętą na jedném ramieniu kąta danego, i na nięć iak na podstawie, przerysule się Trójkąt, pierwszemu ze wszystkiem równy (47.)

49. **Przystósowanie.** 1. Zrobić Trójkąt, którego wiadome są dwa ramiona, i kąt między niemi.

2. Zrobić Trójkąt, którego wiadomą podstawą, i dwa przy nięć kąty.

50. **Zagadnienie 7.** Zrobić Trójkąt, którego dany jest kąt ieden, i dwa boki, ieden przyległy kątowi danemu, drugi naprzeciwko niego leżący.

**Uwaga.** Kąt dany może być prosty, roztwarty, albo ostry. W pierwszych dwóch razach, bok przeciwny kątowi danemu, powinien być większy od boku przy kącie będącego. (38) W trzecim razie, bok przeciwny kątowi, może być większy lub mniejszy od drugiego. We wszystkich tych razach, zrobmy kąt równy danemu, i dajmy mu za

### 34. GEOMETRYI CZĘŚĆ I. ROZDZIAŁ II.

ramię, linią równą daney, a mającay mu służyć za toż ramię.

Z końca téy Linii promieniem równym bokowi danemu, który ma leżeć na przeciwko kąta danego, pociągniemy łuk, któryby przecinał drugie tegoż kąta ramię. Punkt przecięcia oznaczy koniec drugiego ramienia kąta.

Tab. II.

Fig. 9.

Tab. III,

Fig. 1, 2, 3.

Niech będzie C wierzchołek kąta danego, linia CA równa linii daney za ramię tego kąta, i niech łuk kreślony od punktu A, iako od środka, promieniem równym linii drugiey daney (która ma służyć za bok przeciwny kątowi C;) przecina drugie ramię w punktach B, i b.

1. Gdy kąt C jest *Prosty*; dwa Trójkąty: ACB, ACb, mogą przystać do siebie; bo linie pochyłe równe AB, Ab, jednakowo są od prostopadłej AC odległe, a zatem CB i Cb są równe.

W innych razach spuścmy linią prostopadłą AD.

2. Gdy kąt C jest *Roztwarty*, albo *ostry*, ale linia AB, większa od AC; w tym razie linie pochyłe i równe AB, Ab, dalsze są od prostopadłej AD, niżeli linia pochyła AC; a zatem z dwóch Trójkątów ACB, ACb, ieden tylko Trójkąt ACB wypełnia trzy założone *Warunki* (Conditions.)

3.  
AB m  
te i r  
stopad  
Tróyk  
wné,  
łożone

Pos  
dwa T  
albo  
przez  
kątów

1.

2.

3.

4.

dzy n

5.

międz

6.

ty mi  
danen

7.

ty mi  
kątów  
przyp  
sposo  
waru

# O przystawianiu Tróykątów 35

3. Gdy kąt C jest ostry, ale linią AB mniejszą od AC; dwie linie pochyłe i równe: AB, Ab, będą bliższe prostopadłej AD, niżeli linii AC; a zatem Tróykąty ACB, ACb, lubo sobie nierówne, obadwa jednak wypełnią trzy założone warunki.

Powtórzenie przypadków, w których dwa Tróykąty mogą przystać do siebie, albo w których Tróykąt wyznaczony jest przez wiadomość dostateczną boków i kątów jego.

1. Dwa boki i kąt między niemi.

2. Bok ieden i dwa przy nim kąty.

3. Trzy boki.

4. Dwa boki i kąt prosty nie między niemi zawarty.

5. Dwa boki i kąt roztwarty nie między niemi zawarty.

6. Dwa boki i kąt ostry nie zawarty między niemi, i gdy bok przeciwny danemu kątowi jest największy.

7. Dwa boki i kąt ostry nie zawarty między niemi, i gdy bok przeciwny kątowi danemu jest najmniejszy. (Ten przypadek jest wątpliwy) bo dwoiakiem sposobem Tróykąt czyni zadosyć trzem warunkom. Cz 51.



## 36. GEOMETRYI CZĘŚĆ I. ROZDZIAŁ II.

51. *Uwaga 1.* Nietylko z tych, któreśmy tu wymienili wiadomości, ale i z innych jeszcze wyznaczyć można Trójkąt. Te jednak, które się tu wspomniały przypadki, najczęściej zdarzać się zwykły, i wszystkie inne mogą się pod nie podciągnąć.

Cztery ostatnie przypadki mogą być ściągnięte do jednego. (Obacz w Rozdz. 10. Twierdż; 5.) Ale przy początkach lepiej je osobno podawać.

52. *Uwaga 2.* Same tylko Trójkąty są takimi figurami, gdzie wiadomość trzech boków już jest dostateczną do wyznaczenia Trójkąta. Okazać to w prostym przykładzie można na Czworoboku, albo Czworokącie (Quadrilaterum,) którego wszystkie boki są równe. Chociaż albowiem wiedzieć będziemy boki wszystkie tego Czworoboka; nie potrafimy jednak oznaczyć jaki Czworokąt stąd wyniknie, bo tym bokom różne dadź możemy nachylenie; a zatem i Czworokątowi odmienną dadź możemy figurę. Tak n.p. jeżeli damy mu kąty wszystkie proste, zrobi się Kwadrat; jeżeli damy dwa kąty ostre, a dwa rozwarte, zrobi się Czworokąt pochyły tym bardziej, im ostrzejsze iedne kąty, a drugie rozwartsze mieć będzie.

53. *Twierdż: 11.* Linia prosta przecinająca kąt na dwie części równe, ka-  
żdy

## O przystawianiu Trójkątów 37

Żdy w sobie punkt mieć będzie iednakowo odległy od obu dwóch ramion tegoż kąta: a wszelki inszy nie na téj linii Punkt, nie tak odległy będzie od iednego ramienia tego kąta, iak od drugiego.

Niech będzie kąt:  $ACB$ , który na Táb. III.  
dwie części przecina linią  $CD$ ; ieżeli Fig. 4.  
Punkt iaki na niéy, naprzykład  $D$ , we-  
źmiemy, linii prostopadłe  $DE$ ,  $DF$ , do  
ramion tego kąta spuszczone, będą równe.

Dowodz: Dwa Trójkąty prostokątne  
 $CDE$ ,  $CDF$ , które bok  $CD$  spólny ma-  
ią, i kąty przy  $C$  równe, mogą przy-  
stać do siebie (18.) więc linie  $DE$ ,  $DF$ ,  
są równe.

Niech znówu będzie Punkt  $G$ , nie  
w linii  $CD$ ; prostopadłe  $GE$ ,  $GH$ , będą  
nierówne.

Niech albowiem prostopadła  $GE$ , spo-  
tykają w punkcie  $D$ , linią  $CD$ , która na  
dwie części dzieli kąt  $ACB$ . Od Punktu  
 $D$ , spuścmy prostopadłą  $DF$ , i popro-  
wádzmy  $GE$ .

W Trójkącie  $DFG$ , summa linii  $FD$ ,  
 $DG$ , większa jest od boku  $FG$ ; ale ta  
summa linii  $FD$ , i  $DG$ , równa się linii  
 $EG$ ; więc linia  $EG$ , większa jest od li-  
nii  $FG$ . A że znówu linia  $GF$ , większa  
jest od linii  $GH$ ; (38.) więc tym bar-  
dziej linia  $EG$ , większa będzie od li-  
nii  $GH$ . 54.

### 38 GEOMETRYI CZĘŚĆ I. ROZDZIAŁ III.

§4. *Uwaga.* Liniją prostą, którą przedzielił kąt na dwie równe części, nazywamy się *Miejsce* wszystkich Punktów, których odległość jednakową jest od dwóch linii danych.

§5. *Zagadn.* 8. Dany mając kąt, na dwie części go podzielić.

*Rozwiązanie.* Od wierzchołka tego kąta, wzięwszy na ramionach jego dwie linie równe, z końców ich kreślę dwa łuki jednakowym promieniem. Przez ich przecięcie, i przez wierzchołek kąta, prowadzę linią, ta dzielić będzie kąt na dwie równe części.

§6. *Wniosek.* Będzie też można każdą z tych połowę podzielić dalej na dwie równe części, te znowu na dwie i t. d. Przeto każdy kąt może być (przynajmniej myśla) podzielony, na 2, 4, 8, 16, i t. d. części równych.

### ROZDZIAŁ III.

*O Liniiach równo-odległych i o równoległobokach.*

§7. *Twierdzenie 1.* Niech będzie linija prostą, od której dwóch punktów wychodzą dwie linie prostopadłe. Te prostopadłe nigdzie się nie zniżyda, choć



choćbyśmy je nąybardziej przedłużali.

Dowodz: Gdyby te prostopadłe, gdzie się zeszyły, zrobiłyby z trzecią linią, od której są wyprowadzone, Trójkąt mający dwa kąty proste; a to jest niepodobna.

58. Defini: Dwie linie na Płaszczyźnie (Planum) poprowadzone, gdy się zeyśdź z sobą nie mogą, nazwane są Równo-odległe (Parallelae.)

W ogólności zaś mówiąc: iakikolwiek linie dwie proste od trzeciej przecięte iednakowo z jednéj strony nachylające się do téj trzeciej linii, są równo-odległe.

59. Niechby naprzykład linie CF, Tab. III. DG, przecięte w punktach A, i B, od Fig. 5. linii HE, miały kąty, CAE, DBE, równe; te dwie linie nie mogą się nigdzie zeyśdź z sobą. Gdyby albowiem gdzie się zeszyły, w Trójkacie z nich i z trzeciej linii AB złożonym, byłby kąt zewnętrzny DBE, równy iednemu z wewnętrznych CAE; co bydź nie może. (31.)

60. Wniosek: Ponieważ kąt HBG, równa się kątowi DBE, (ro.) a kąt HAF kątowi CAE, można podobnie dowieśdź że linie CF, DG, nie zeydą się ani z drugiej strony linii HE.

40 GEOMETRII CZĘŚĆ I. ROZDZIAŁ III.

61. Defn: Kąty DBE, CAE, nazwać można *Jednostronne*, podobnie, iako i kąty: DBH, CAH; EBG, EAF; GBH, FAH, kąty: DBH, CAE, nazywają się *Wewnętrzne* (Interni) takie też są i kąty: FAE, GBH. Kąty: FAE, DBH, nazwać można kątami na przemián, toiest na przemián ległými (po łacinie zowią się *Alterni*) toż nazwisko daie się i kątóm CAE, GBH.

Té Definicje znać dobrze Uczniowie powinni.

62. Kąty przyległe: DBE, DBH, czynią razem dwa kąty proste: (14.) ale że kat DBE równa się katowi CAE, dla równy pochyłości obudwóch linii DB, i CA, do linii HE; więc i kąty wewnętrzne: DBH, CAE, razem wzięte równe będą dwóm kątóm prostym.

63. Kąty w wierzchołku przeciwne DBE, HBG, są równe (16.) więc i kąty na przemián CAE, HBG równe będą.

64. Pierwsze Twierdzenie można i tak wyrazić: że jeżeli dwie linie proste przecięte przez linią trzecią, czynić będą z nią kąty jednostronne równe, albo kąty na przemián równe, albo że dwa kąty wewnętrzne równać się będą summie dwóch kątów prostych; takie linie będą równo odległe.

65.

### O Liniach równo-odległych 41

55. *Zagadn.* 1. Daną mając jedną linię, poprowadzić drugą równo odległą, przez punkt dany.

Niech będzie linią daną  $BC$ , i punkt  $A$ .  
A także dany: przez ten Punkt poprowadzić linią równoodległą od linii daney  $BC$ . Táb. III.  
Fig. 6.

*Rozwiązanie.* Przez Punkt  $A$  ciągnijmy jakąkolwiek linią, na przykład  $AD$ , do  $BC$ . Przy Punkcie  $A$ , zróbmy kąt  $DAE$ , równy kątowi  $ADC$ . Linią  $AE$ , będzie tą równoodległą, którejśmy szukali.

*Dowódz:* Kąty na przemian  $DAE$ ,  $ADC$ , są równe, więc linie  $BC$ ,  $AE$ , są równoodległe.

56. *Twierdź:* 2. Jeżeli kąty jednostronne  $CAE$ ,  $IBE$ , nie są równe, choćby też i bardzo nieznaczna była ich różnica; wszelako jednak linie  $AC$ ,  $BI$ , zniydą się gdziekolwiek z sobą; albo (co na jedno wychodzi) jeżeli summa kątów wewnętrznych  $IBH$ ,  $CAE$ , mniejsza, albo większa jest od dwóch kątów prostych; tedy dwie linie  $CF$ ,  $IL$ , zniydą się z tej strony linii  $HE$ , gdzie ta summa jest mniejsza od dwóch kątów prostych. Táb. IV.  
Fig. 1.

Na dowodzenie tego Twierdzenia wysilali od dawnych czasów dowcipy swoje Geometrowie, i pospolicie fałszywie je dowodzili; bo będąc to Twierdzenie



w sobie tak jasne, można było i bez dowodzenia na nie przystać. Można jednak dowieść je bez popadnięcia omyłce: ale dowody te tak długie, że ciąg i związek ich, wielkiego nateżenia, uwagi, i rozumu wyciągający, znudziłby uczniów tym bardziej, imby mniej przeświadczeni byli o pożytku i potrzebie tego dowodzenia. Rozumiem, idąc w tym za przykładem Euklidesa, że lepiej jest mieć to Twierdzenie za oczywiste, zwłaszcza dowiódłszy już dwóch innych Poddań *odwrotnych*, (*Propositio inversa*;) pierwszego, że, gdy linie schodzą się z sobą, kąty jednostronne są nie równe: drugiego, że, gdy kąty jednostronne równe są, linie z sobą się zeydź nigdzie nie mogą.

67. *Wniosek*. Jeżeli dwie linie są równoodległe, a trzecią je przecina; kąty jednostronne będą równe, kąty na przeciwnych także równe, i kątów dwóch wewnętrznych summa równać się będzie summie dwóch kątów prostych. Jeden z tych trzech wniosków przypuściwszy, przypuścić trzeba i dwa drugie, tak, jak w pierwszym Twierdzeniu. Jakoż, gdyby którakolwiek z tych trzech równości kątów, nie była prawdziwą, iużby tym samym linie zeydź się gdzie z sobą mogły, to jest nie byłyby równoodległe.

*Defin*: Czworokąt, którego boki na przeciwko siebie leżące są równoodległe,  
na.

nazywa  
(Paral  
czy w  
wnych  
lis.)

68.  
ległobo  
wne są

Nie  
mieć o  
boki A  
ciwne

Przy  
kątną

Don  
mogą p  
bok A  
CAB,  
ACB t  
ie AB,  
AD, B  
ty A i  
względ  
Tróyka

69.  
wnoleg  
przysta

70.  
równoc

O Liniiach równo-odległych 43

nazywać będziemy *Równoległobokiem*. (Parallelogrammum.) Liniją, która łączy wierzchołki dwóch kątów przeciwnych, nazwiemy *Przekątną* (Diagonalis.)

68. *Twierdź 3.* W każdym Równoległoboku, boki przeciwne i kąty przeciwne są równe.

Niech będzie Równoległobok ABCD, mieć on będzie boki AB, i DC równe; boki AD, i BC także równe, i kąty przeciwne A i C, iako też B i D, równe.

Tab. IV.  
Fig. 2.

*Przygotowanie.* Poprowadźmy przekątną AC.

*Dowód:* Dwa Trójkąty: ACB, CAD, mogą przystać do siebie: mają albowiem bok AC spółny, kąty na przemian ACD, CAB, równe, i kąty na przemian CAD, ACB także równe; a zatem (23.) i linie AB, DC są równe, iako też i linie AD, BC; kąty także B i D równe, i kąty A i C iako składające sumę kątów względem siebie równych w obudwóch Trójkątach, także równe.

69. *Wniosek 1.* Przekątna dzieli Równoległobok na dwa Trójkąty, które przystać do siebie mogą.

70. *Wniosek 2.* Jeżeli dwie linie są równoodległe, spuściwszy od dwóch punktów

któw iedney, dwie prostopadłe do drugiej, te prostopadłe równe będą.

71. *Wniosek 3.* Jeżeli Równoległobok má ieden kąt prosty, wszystkie też inne kąty iego proste będą; a jeżeli dwa iego boki przyległe, są równe, wszystkie także boki równe będą.

72. *Defin.* Równoległobok, którego kąty są proste, nazywa się *Prostokątem* (Rectangulum.)

Prostokąt, którego wszystkie boki są równe, zowie się *Kwadratem*. Równoległobok, który má kąty nierówne, zachowuje nazwisko Równoległoboku; lubo czasem z przydatkiem się wyraża, że jest Równoległobokiem *Ukośnym* (Obliquangulum.) Równoległobok ukośny, którego boki wszystkie są równe, nazywany byđź może *Kwadratem ukośnym* (Rhombus.)

73. *Twierdź 4.* Jeżeli w Czworokącie boki przeciwne są równe, taki Czworokąt będzie Równoległobokiem.

*Fig. taż  
co wyżej*

Niech będzie Czworokąt: ABCD, którego boki przeciwne AB, CD, są równe, i boki przeciwne AD i BC także równe, ten Czworokąt będzie Równoległobokiem.

*Przygotowanie.* Poprowadźmy Przekątną AC.

Do.

Don  
boki trz  
kóm w  
siebie r  
kąty na  
więc lin  
dobnie  
odległe.

74.  
dwa bo  
odległe  
głoboki

Niech  
ręgo bo  
i równ  
wnoległ

Przy  
kątną

Don  
CAB,  
CD rów  
CAB,  
wnę; w  
a w szc  
dą rów  
liniie A

75.  
dwa bo  
wnę,  
kiem,



### O Liniiach równo-odległych 45

Dowodz: W Trójkątach: ACD, CAB, boki trzy w jednym równe są trzem bokom w drugim; (68.) więc przystać do siebie mogą (25:) w szczególności zaś kąty na przemian CAB, ACD są równe, więc linie AB, CD są równoodległe: podobnie i linie BC, AD są także Równoodległe.

74. Twierdź: 5. Jeżeli w Czworokącie dwa boki przeciwne są równe, i równoodległe; taki Czworokąt jest równoległobokiem.

Niech będzie Czworokąt ABCD, którego boki przeciwne AB, CD są równe, i równoodległe, ten Czworokąt jest Równoległobokiem. Fig. taż  
cowyżej

Przygotowanie. Poprowadźmy Przekątną AC.

Dowodz:: Dwa Trójkąty: ACD, CAB, mają bok AC spółny, boki AB i CD równe i kąty na przemian: ACD, CAB; zawarte między temi bokami, równe; więc przystać do siebie mogą; (18-) a w szczególności, kąty: CAD, ACB będą równe, że zaś są na przemian: więc linie AD i CB są równoodległe.

75. Uwaga. Czworokąt może mieć dwa boki równoodległe, a dwa inne równe, a nie byź przeto Równoległobokiem, chyba w ten czas, gdy boki przyległe

#### 46. GEOMETRYI CZĘŚĆ I. ROZDZIAŁ III.

ległe bokóm równoodległym, są prostopadłe. Widzieć to można na Figurze 3. gdzie lubo Czworokąt ABCD, má boki dwa przeciwne: AB i CD równoodległe, boki AD i BC równe, nie iest iednak Równoległobokiém.

76. Zagádn: 2. Maiąc daną linią prostą, postawić na niéy Kwadrat.

*Rozwiązanie.* Z końca iednego linii danéy, wyprowadźmy prostopadłą iéy równą. Z drugiego końca téy danéy linii i prostopadłej, iako do środka promiennem równym danéy linii, nakreślmy dwa łuki okręgu, i Punkt ich przecięcia złączmy z końcem linii danéy i prostopadłej.

*Dowódz:* Czworokąt tak zrobiony, będzie miał wszystkie boki równe, i kąt ieden prosty; więc będzie Kwadratem.

77. Zagádn: 3. Wykreślić prostokąt, którego boki są dané.

Sposób wykreślenia iest ten sam, co wyżej, (76.) z tą różnicą, że prostopadła powinna mieć długość daną, a nie byż równą podstawie; promienie także łuków kreslić się mających, ieden powinien byż równy podstawie, a drugi prostopadłej.

78. Zagádn: 4. Wykreślić Równoległo-

O  
globok,

Spóś  
od popr  
padłey p  
nachylem

R O  
O kąta  
ślny

Widz  
Tru  
z dwóch  
ciwnych  
zewnętr  
wewnętr

79.  
ką: AB  
tén kąt  
wewnętr

Przy  
wnoodle

Dow  
są równ  
né: A,  
A, równ  
to iest k

prosto-  
turze 3.  
a boki  
dlegie,  
iednak

ią pro-

go linii  
ię ró-  
y linii  
rómie-  
ny dwa  
ia zią-  
stopa-

biony,  
, i kąt  
ratém.

stokąt,

m, co  
stopa-  
a nie  
także  
powi-  
gi pro-

wnole-  
gło.

# O Liniach równo-odległych 47

głobok, którego kąt jest wiadomy, i boki.

Sposób wykreślenia tym tylko różni się od poprzedzającego, że zamiast prostopadłej poprowadzić potrzeba linią z tem nachyleniem, któreby czyniło kąt dany.

## R O Z D Z I Á Ł IV.

*O kątach w Figurach Prostokr-  
ślnych, a w szczególności  
w Trójkątach.*

**W**idzieliśmy, (31.) że kąt zewnętrzny Trójkąta, większy jest od iednego z dwóch kątów wewnętrznych iemu przeciwnych; dowiedziemy teraz, że ten kąt zewnętrzny równa się obudwóm kątóm wewnętrznym naprzeciw siebie leżącym.

79. *Twierdź:* 1. Niech będzie Trójkąt: ABC, a kąt iego zewnętrzny: CBD; ten kąt równy jest summie dwóch kątów wewnętrznych: A i C.

Táb. IV.  
Fig. 4.

*Przygotowanie.* Poprowadźmy BE, równoodległą od AC.

*Dowódz:* Kąty na przemian C i CBE są równe; równe także i kąty iednostronne: A, i EBD; więc summa kątów: C i A, równa jest summie kątów: CBE i EBD, to jest kątowi zewnętrznemu CBD.



#### 48 GEOMETRYI CZĘŚĆ I. ROZDZIAŁ IV.

80. *Twierdź:* 2. W każdym Trójkącie, summa trzech kątów równa jest dwóm kątóm prostym.

Niech będzie Trójkąt:  $ACB$ ; summa trzech iego kątów, równa się summie dwóch kątów prostych.

*Przygotowanie.* Pociągniemy dalej  $AB$ , naprzytykad aż do  $D$ .

*Dowód:* Już się dowiodło, że kąt zewnętrzny  $CBD$ , równa się dwóm kątóm wewnętrznym  $A$  i  $C$ ; więc summa kątów  $CBD$ , i  $CBA$ , równać się będzie summie kątów:  $A$ ,  $C$ , i  $CBA$ ; ale summa dwóch pierwszych kątów, iako przyległych, wyrównywa dwóm kątóm prostym, więc i drugą trzech kątów summa, tymże dwóm kątóm prostym jest równa. (h)

18.

(h) To Twierdzenie jest bardzo wielkiéy wági; przeto trzeba, aby iak náydokładniéy zrozumieli iś Uczniowie, iako inszé Twierdzenia, od których dowiedziénie tego zawisło. Tu podobno mieyscé byłoby pokazania związku Twierdzeń dotąd podanych iednych z drugiémi, który to związek istotny jest postępowaniu Geometrycznemu. Cwiczenia, które poprzedziły, już powinny były dać poznać Ucznióm tén sposób postępowania. Trzeba iednak często im związek takowy okazywać, i iak się iedna prawda z drugiéy odkrywa. Stąd náywiekszy pożytek z Matematyki odnieść mogą, i nabiorą prawdziwa-

O k

81.

boczny  
jest trze  
albo  $\frac{2}{3}$   
każdy v

82.

dwa ką  
trzeci.

Przy

régio. ką

summa

Różnica

stych, a  
ważność

83.

ramienn  
zaráz i

Przy

wierzech  
wnoram

inszé w

z nich v

go ducha  
żytecznié  
domość

O kątach w Figurach Prostopadłych: 49

81. *Wniosek 1.* W Trójkącie równobocznym, każdy w szczególności kąt, jest trzecią częścią dwóch kątów prostych, albo  $\frac{2}{3}$  kąta iednego prostego, toiest, każdy waży 60. stopni.

82. *Wniosek 2.* W Trójkącie, znając dwa kąty, już tem samém znany i kąt trzeci.

*Przykład.* Niech będzie Trójkąt, którego kąt ieden má stopni 30, a drugi 72, summa tych dwóch kątów będzie 122. Różnica zaś 122. od dwóch kątów prostych, albo od 180, iest 58, i ta iest ważność trzeciego kąta.

83. *Wniosek 3.* W Trójkącie równoramiennym, znając kąt ieden, poznamy zaraz i dwa drugie.

*Przykład.* Niechby kąt ieden przy wierzchołku ważył 40; w Trójkącie równoramiennym. Już tem samém dwa insze wążą 140; aże są równe, każdy z nich wążyc będzie połowę, toiest 70.  
D Niechby.

go ducha Matematycznego: co nierównie pożyteczniéj im będzie, iak mieć nawet wiadomość saméj Matematyki.

Niechby znowu kąt ieden przy Podstawie wazył 64, i drugi przy Podstawie wazyłby 64. Summa tych dwóch kątów byłaby 128, a różnica między 180, i 128, toiest 52, pokazałyby ważność kąta trzeciego.

84. Defn: Figura mająca więcej niż cztery boki, albo kąty, nazywa się *Wielokątem* (Polygonum.)

85. Twierdz: 3. Ważność summy kątów wszystkich w Figurze *Prostokreślnej* (Figura *Rectilinea*,) zawisła od liczby boków téżże Figury. Liczbę tę boków podwoiwszy, i odciawszy od podwoionej liczbę: 4; reszta okaże w kątach prostych ważność kątów wszystkich Figury prostokreślnej. Nim się przystąpi do ogólnego dowodzenia, trzeba zacząć od przypadków szczególnych w sposób podobny następującemu.

Niechby naprzykład Figura *Prostokreślna* miała tylko cztery boki, toiest niechby tylko była *Czworokątem*. Poprowadziwszy w nię Przekątną, ta podzieli *Czworokąt* na dwa *Trójkąty*, w których summa kątów razem wzięta, będzie równa summie kątów w *Czworokącie*. Aże ta summa kątów w dwóch *Trójkątach*, wazy cztery kąty proste; więc

### O kątach w Figurach Próstokr.: 51

więc i summa kątów w Czworokącie  
wazyć także będzie cztery kąty proste.

Niechby Figura miała pięć boków,  
to jest była *Pięciokątem* (Pentagonum.)  
Poprowadźmy od iednego wierzchołku,  
do dwóch drugich przeciwnych dwie  
Przekątne; podzielią one *Pięciokąt* na  
trzy *Trójkąty*, których summa ważności  
kątów, to jest 6. kątów prostych, bę-  
dzie też summą ważności kątów *Pięcio-*  
*kąta*.

*Dowodzenie ogólne.* Od wierzchołku  
kąta któregokolwiek w Wielokącie, po-  
prowadźmy tyle przekątnych, ile można.  
Postrzeżemy łatwo, że *Trójkątów* licz-  
ba z tego podziału wynikająca, mniey-  
szą będzie dwoma, od liczby boków  
Wielokąta: albowiem od kąta tego, od  
którego się prowadziły Przekątne, nie  
można ich było prowadzić do dwóch  
innych kątów náybliższych, boby tylko  
przykryły sobą dwa náybliższe boki,  
albo ramiona tego kąta, i nie zrobiły  
*Trójkątów*. Ponieważ zaś w każdym  
*Trójkącie* ważność trzech kątów, równa  
się ważności dwóch kątów prostych, bę-  
dzie więc dwa razy tyle zawierało się  
(co do ważności) kątów prostych w Wie-  
lokącie; ile się zawiera w nim *Trójką-*  
*tów*. A że liczba *Trójkątów*, mnieyszą  
jest dwoma, od liczby boków Wieloką-  
ta; więc liczba kątów prostych, w tym-



że Wielokacie, będzie dwa razy tak wielką, to jest będzie się równać liczbie boków podwoionych, odrzuciwszy od niej dwa razy 2. to jest 4; a zatem ważność kątów wszystkich wielokąta w kątach prostych znajdziemy odeymuiąc liczbę 4. od liczby podwoionéy boków tegoż Wielokąta. (i)

86.

(i) Dowodzenie to mogłoby się wydawać trudnem; gdyby go wiele przykładów na Wielokątach szczególnych nie poprzedziła, i Figury na każdy szczególny przykład kręśloné nie objaśniły. Wielé jednak na tém zawisło, aby i bez Figury przynuczali się Uczniowie dawać sprawę z tego, czego się nauczyli: a tym sposobem aby wprawiali się w zachowanie dobrego porządku, tak w wyobrażeniach, które sobie czynić będą, iako téż i w samych wyrazach. Szczególniejszego zaś starania przykładu trzeba, aby bardziéy rozumem, niż pamięcią wszystko to, czego się uczyć będą, ogarnywali. Z téy przyczyny przy rozwiązywaniu niektórych zagadnień, opuszczają się umyślnie Figury. Niech jednak stąd nie wnoszą Nauczyciele, aby wcale bez Figur obeysdz się mogło: i owszém niech przyuczają Uczniów, aby ié sami sobie kręślić umieli z pamięci, zrozumiałwszy piérwéy Twierdzenia, do których dowodzenia stosować się mają té Figury. Przykłady dotąd przytoczone, tym sposobem się podawały, którym potrzeba, aby i Uczniowie dawali sprawę z działań iuż dobrze od siebie pojętych. Odpowiedź náypospolitszą młodych jest, tych nawet, którzy lepiéy rzecz przenikaia: *Umiem ia to, ale się wytłumaczyć nie mogę.*

## O kątach w Figurach Prostokrętnych 53

86. *Twierdź 4.* Pociągnawszy dalej w jedną stronę boki wszystkie Wielokąta, iakąkolwiek będzie liczba boków jego, zawsze jednak summa kątów zewnętrznych, zamkniętych między bokiem jednym i przedłużeniem drugiego przyległego, ważyć będą cztery kąty proste. (k)

Nim się przystąpi do ogólnego Dowodzenia, trzeba piérwéj na szczególnych przykładach tego Twierdzenia dowieść, zaczawszy od Trójkąta, w którym każdy kąt z swoim zewnętrznym przyległym waży dwa kąty proste: a że kątów jest w Trójkącie trzy, więc z przyległými ważyć będą sześć kątów prostych: trzy zaś kąty, które się w Trójkącie znajdują, ważą dwa kąty proste: więc te, które są za Trójkątem, to jest zewnętrzne, ważyć będą cztery kąty proste.

*Dowodzenie ogólne.* Każdy kąt wewnętrzny w Wielokącie, z swoim zewnętrznym przyległym, waży dwa kąty proste: więc summa wszystkich kątów tak wewnętrznych, iako i zewnętrznych, waży dwa kąty proste wzięte tyle razy,

---

(k) Mówię tu tylko o wielokątach, w których kąt każdy mniejszy jest od dwóch kątów prostych, to jest o takich, w których kąty są wyskakujące (*Salientes*.)

zy, ile jest boków w Wielokącie; a zatem summa samych kątów zewnętrznych, wazyć będzie tyle, ile brakuje summie kątów wewnętrznych, aby wazyła dwa kąty proste wzięte tyle razy, ile ma boków Wielokąt. Ale że, (iakośmy w poprzedzającym Twierdzeniu dowiedli,) brakuje do tego tej summie kątów cztery; więc summa kątów zewnętrznych Wielokąta wazyć będzie cztery kąty proste.

87. *Uwaga.* 1. Náywiększy wagi są te przypadki, w których kąty wszystkie Wielokąta są równe. Każdy w tym razie kąt zewnętrzny, wazy 4. kąty proste, podzielone przez liczbę boków Wielokąta. Wążność zaś każdego kąta wewnętrznego znaydziemy, odtrąciwszy ten Wieloraz, toiest: wążność iednego kąta zewnętrznego od dwóch kątów prostych.

Jeżeli wszystkie kąty wielokąta są równe; tedy im większy będzie każdy kąt iego zewnętrzny, tym mnieyszy będzie wewnętrzny; a im mnieyszy tamten, tym ten większy.

Po dowiedzionych tych Twierdzeniach, łatwo będzie Ucznióm ułożyć sobie Tąblicę wążności kątów tak wewnętrznych, iako i zewnętrznych w tych wielokątach, w których kąty wszystkie są równe, i mogą tę wążność wyrazić, czyli przez kąty proste, czyli przez stopnie.

## O kątach w Figurach Prostokr.: 55

88. Uwaga 2. Umiejąc dowieść dwóch Twierdzeń poprzedzających, można rozwiązać i to, co następuje zadanie:

Jak wielorakim sposobem około Punktu danego napełnić można miejsce (to jest cztery kąty proste) przez kąty Figury Prostokreślnej jednego gatunku, (1) i które wszystkie kąty są równe?

1. Gdy Trójkąt ma wszystkie boki równe, czyli jest Równobocznym; każdy z kątów jego wazy trzecią część dwóch kątów prostych, albo  $\frac{2}{3}$  jednego kąta prostego; a zatem sześć takich kątów, uczyni 4. kąty proste, i napełni miejsce około Punktu jednego.

2. Gdy Czworokąt ma wszystkie kąty równe czyli jest Prostokątem; każdy z kątów jego jest kątem prostym, a zatem 4. takie kąty wazyć będą 4. kąty proste.

3. Kąt zewnętrzny Pięciokąta, którego kąty wszystkie są równe, wazy  $\frac{1}{5}$  część

---

(1) Mówię, *jednego gatunku*, ponieważ gdyby wolno było mieszać kąty różnych Wielokątów; można by 14. sposobami napełnić miejsce około jednego Punktu, używając tych tylko Wielokątów, które kąty wszystkie równe mają.



56 GEOMETRYI CZĘŚĆ I. ROZDZIAŁ IV.

część czterech kątów prostych, albo  $\frac{4}{5}$  iednego kąta prostego; a zatem każdy kąt wewnętrzny, ważyć będzie:  $\frac{1}{5}$  kąta prostego. Trzy takowe kąty, czynią tylko 3. kąty proste i  $\frac{3}{5}$  co jest mniej iak 4, a cztery takie kąty, czynią 4. kąty proste i  $\frac{4}{5}$  co jest więcej iak 4. Przeto kątami Pięciokąta, mającego wszystkie kąty równe nie można napelnąć miejsca około Punktu iednego.

4. Kąt zewnętrzny Sześciokąta, którego kąty wszystkie są równe, waży  $\frac{1}{6}$  część czterech kątów prostych, albo  $\frac{2}{3}$  iednego kąta prostego: a zatem każdy kąt wewnętrzny ważyć będzie, i.  $\frac{1}{3}$  kąta prostego. Trzy zaś takowe kąty, czynią zupełnie cztery kąty proste.

Jeżeli Wielokąt ma więcej niż 6. boków, każdy z kątów jego wewnętrznych, będzie większy od kąta w sześciokącie; trzy więc takowe kąty uczynią więcej niż 4. kąty proste; a że kąt Wielokąta mającego boki wszystkie równe, jest zawsze mniejszy od 2. kątów prostych, więc dwa takie kąty nie wystarczą na napelnienie miejsca około Punktu iednego.

Tab. IV.  
Fig. 5. 6. i  
Tab. V.  
Fig. 1.

Przeto trzema tylko sposobami rozwiązać można wzwyż wyrażone Zadanie,

*O kątach w Figurach Prostokreślnych* 57

nie, to jest przez 6. kątów Trójkątą, przez cztery kąty Czworokątą, i przez trzy kąty Sześciokątą.

Natura sama nauczyła Pszczoły układać w ulu komórki w sześciokąty.

ROZDZIAŁ V.

*O Równoległobokach i Trójkątach równych co do Powierzchni, i o zamięnięniu iakięykolwiek Figury Prostokreślnej, na Trójkąt i na Równoległobok.*

Widzieliśmy w Rozdziale drugim przypadki w których dwa Trójkąty mogą przystać do siebie, i bydź zatem co do Powierzchni, równe. W Rozdziale trzecim, widzieliśmy także, iako dwa Równoległoboki, które miały i boki i kąty równe mogły przystać do siebie, i że zatem powierzchnie ich równe były. Te przypadki przystawiania iednych Figur do drugich były tylko, co do równości Powierzchni, przypadkami szczególnymi; ogólniejsze zaś w tę mierze Twierdzenia będą rzeczą tego Rozdziału.

80. *Twierdzenie* I. Dwa Równoległoboki zrobione na iednejże Podstawie, a z przeciwnęj strony zakończone przez Liniją równoodległą od postawy, mają Powierzchnie równe. Niech

Táb. V. Niech będą dwa Równoległoboki:  
 Fig. 2.3.4. ABCD, AB EF, których taż sama jest Podstawa AB, a kończy ie. z drugiey strony, równoodległa od Podstawy Linia: DE. te dwa Równoległoboki, mają równe Powierzchnie, iakąkolwiek boków ich długość będzie.

Dowódz: Trójkąty: DAF, CBE. mogą przystać do siebie; boki albowiem AD, BC są równe, bo naprzeciwko leżące w Równoległoboku ABCD; boki też AF, BE, równe, bo naprzeciwko leżące Równoległoboku AB EF. Kąty oprócz tego iednostronne: ADF, BCE, i AFD, BEC, równe. Odiawszy tedy osobno Trójkąt DAF, i Trójkąt iemu równy CBE, od całej Figury ABED; reszty będą równe, toiest Równoległobok AFEB, równy będzie Równoległobokowi ABCD.

To Twierdzenie. możnaby objaśnić Figurą z papieru grubego wyrobioną, i zacząć od przypadku, który wyraża Figurą 2. gdzie punkta C i F razem przypadają. W takim razie Trójkąty: ACD, BEC równe są, pierwszy i drugi Trójkątowi: ABC; a zatem i sobie są równe; więc tak równoległobok ABCD, iako i AB EF złożony iest z dwóch Trójkątów równych.

90. Defn: Ponieważ linie przestopdłe spuszczone od któregokolwiek Punktu linii, na drugą linią równoodległą, są  
 ró-

## O Równoległobokach i Trójkątach 59

równe; jeżeli więc od punktu któregokolwiek w boku Równoległoboku spuścimy do boku przeciwnego linią prostopadłą; ta prostopadła jednakowey zawsze będzie wielkości, i nazywa się *Wysokością* tego Równoległoboku, względem drugiego boku, do którego jest spuszczo-  
na, i który wzięty jest za Podstawę tegoż Równoległoboku. Twierdzenie poprzedzające możnaby też i tak wyrazić: *Dwa Równoległoboki mające spólną Podstawę, i wysokość jednakową, są równe.*

91. *Twierdzenie 2.* Dwa Równoległoboki są równe, których Podstawy i wysokości równe.

92. *Dowódz:* Do Podstawy iednego z tych Równoległoboku, przyłożmy Podstawę drugiego; przystaną zupełnie do siebie te Podstawy, bo są równe; będą więc te postawione na sobie Równoległoboki miały spólną Podstawę, i równą wysokość; a zatem według pierwszego Twierdzenia będą równe.

93. *Twierdż:* 3. Jeżeli dwa Równoległoboki zrobione na iedney Podstawie, równe mają Powierzchnie, równe też i wysokości mieć będą.

Niech będą dwa Równoległoboki Táb. V. ABCD, ABEF, których obudwóch Pod-  
stawa jest AB, i) równa Powierzchnią; mają one i wysokość iednakową, to jest

Fig. 5.



zakreślone są przez tę samą linią równoodległą od Podstawy.

*Dowódz:* Gdyby Punkta F i E, nie były na linii DC, albo na ięj przedłużeniu; toby inne jakie Punkta, na przykład H, i G. linii AF, BE, były na tejże linii DC, a zatém Równoległoboki ABCD, ABGH, byłyby równe. Aleśmy wzięli za równe Równoległoboki ABCD, i ABEF, więc i Równoległoboki ABEF, i ABGH byłyby równe, co jest niepodobną, chyba że Punkta H i G będą te same, co i Punkta F i E.

W ogólności mówiąc: Dwa Równoległoboki, mające równe Podstawy i Powierzchnie, mają też i równe wysokości; a gdy znowu Równoległoboki mieć będą wysokości i Powierzchnie równe, i Podstawy ich równe będą.

24. *Twierdz:* 4. Gdy Trójkąt i Równoległobok, stoi na téżże samej Podstawie, a wierzchołek Trójkąta przypada na boku równoodległym od Podstawy i należącym do Równoległoboku, albo na przedłużeniu tegoż boku; taki Trójkąt jest połową Równoległoboku.

Táb. VI. Niech będzie Równoległobok ABCD, Fig. 1. a Trójkąt ABE, mający z nim spólną podstawę AB, i niech wierzchołek E, Tróy-

O R

Tróy

cyn

ABE

ALC

I

BF,

tkah

D

wą

bok

legł

ABE

ABE

ku A

2

wier

zyw

dzien

inac

i Tr

soko

Rów

9

wac

się

tak:

I

staw

Pow

## O Równoległobokach i Trójkątach 61

Trójkąta przypada na boku DC należącym do Równoległoboku; Trójkąt ten ABE, będzie połową Równoległoboku ABCD.

*Przygotowanie.* Przez B poprowadźmy BF, równoległą od AE, która by spotkała DC, w F.

*Dowodzenie.* Trójkąt ABE, jest połową Równoległoboku ABFE, ponieważ bok BE Trójkąta jest Przekątną Równoległoboku: ABFE. A że Równoległoboki ABFE, ABCD, są równe; więc Trójkąt ABE, jest także połową Równoległoboku ABCD.

95. *Defin.* Prostopadła spuszczonej od wierzchołka Trójkąta do Podstawy, nazywa się *wysokością* tego Trójkąta. Twierdzenie tedy powyższe takby mogło być inaczej wyrażone: *Jeżeli Równoległobok i Trójkąt mają wspólną Podstawę, i wysokość równą; Trójkąt ten będzie połową Równoległoboku.*

96. *Wniosek.* Można więc przystosować wszystko do Trójkątów, cokolwiek się o Równoległobokach powiedziało. I tak:

r. Dwa Trójkąty mające równe Podstawy i wysokości, równe mieć będą i Powierzchnie.

42 GEOMETRYI CZĘŚĆ I. ROZDZIAŁ V.

2. Dwa Trójkąty równe w Powierzchniach, i w wysokościach albo w Podstawach; będą też miały równe Podstawy lub wysokości.

W ogólności zaś mówiąc: z tych trzech ilości; z Podstawy, wysokości, powierzchni Równoległoboku lub Trójkąta, dwie którekolwiek wiadome; trzecią poznać dać; jedna zaś nie jest dostateczną, aby z niej dwie drugie wyznaczyć można. Obaczymy dalej w tym Rozdziele, iako można zrobić tyle Równoległoboków równych i równokątnych, ile zechcemy, chociaż boki nierówne mieć będą. (m)

97. *Zagadn.* I. Mając dany Równoległobok, zamienić go na Prostokąt, któryby tę samą miał Podstawę i Powierzchnią.

*Rozwiązanie.* Od obudwóch końców Podstawy, wynieśmy linie prostopadłe, aż do boku Podstawie przeciwnego; zrobi się Prostokąt równy Równoległobokowi, co do Podstawy i Powierzchni.

Podobnym sposobem postąpić sobie

---

(m) Trzeba to dobrze dać poznać Uczniom, że wielkość Równoległoków i Trójkątów nie zawisła od ich obwodu (Perimeter) omyłki w téj mierze częste zwykły bywać.

### O Równoległobokach i Trójkątach 63

potrzeba, chcąc zamienić Równoległobok dany na drugi równy pierwszemu w Podstawie i w Powierzchni, gdy inny iakolwiek kąt przy Podstawie, a nie prosty dany będzie.

98. Zagadn. 2. Trójkąt dany zamienić na inny Prostokątny, któryby miał tę samą Podstawę i Powierzchnią.

Rozwiązanie. Przez wierzchołek Trójkąta danego, poprowadźmy równoległą od Podstawy, a od końca któregośkolwiek téżże podstawy, wynieśmy prostopadłą aż do równoległej; Punkt przecięcia tych dwóch linii będzie wierzchołkiem Trójkąta szukanego.

Podobnym sposobem postąpimy sobie chcąc zamienić Trójkąt dany na drugi równy mu w Podstawie i w Powierzchni: gdy inny a nie prosty kąt przy Podstawie dadź będzie potrzeba temu drugiemu Trójkątowi.

99. Zagadn. 3. Zamienić Trójkąt dany, na Równoległobok prostokątny, któryby miał albo tę samą co Trójkąt podstawę, albo tę samą wysokość.

Rozwiązanie. Równoległobok prostokątny, któryby miał tę samą podstawę, i wysokość, co Trójkąt; byłby dwa razy tak wielki; a zatem Równoległobok ten, którego szukamy, powinién mieć tę samą



samą podstawę, co Trójkąt, a połowę jego wysokości; albo też tę samą wysokość, a połowę tylko Podstawy.

100. Zagadn: 4. Czworokąt dany zamienić na Trójkąt téż samę powierzchnię.

Rozwiąz: Poprowadźmy w Czworokącie danym przekątną, a przez wierzchołek jednego z kątów téj przeciwnych, pociągniemy równoległą od téż przekątnej. Wszystkie Trójkąty mające za podstawę tę przekątną Czworokąta, a wierzchołek na równoodległej od téj przekątnej będą równe w Powierzchni Trójkątowi, który czyni ta przekątna z dwoma bokami Czworokąta schodzącymi się na równoodległej (96.) a zatem będzie też równy w powierzchni temu Trójkątowi, i Trójkąt mający za Podstawę tę samą co i tenże przekątną, a za bok jeden mający przedłużenie aż do równoległej, boku Czworokąta leżącego z drugiej strony przekątnej; ten Trójkąt ostatni dodawszy do Trójkąta z drugiej strony przekątnej leżącego, zrobi się Trójkąt równy co do powierzchni Czworokątowi danemu: bo ponieważ Trójkąty dwa, na które jest Czworokąt przez przekątną podzielony, równa się co do powierzchni całemu Czworokątowi; więc temuż Czworokątowi równy także będzie co do powierzchni i Trójkąt przez przekątną w Czwo-

roką-

rokac  
wier  
dzące  
dopeł

N  
rokac  
BD,  
wier  
Tróyl  
gnię  
CE w  
równ  
wi A

i  
pimy  
boki  
odmi  
dzim  
cięta  
poten  
pocia  
katne  
odleg  
do pr  
przec  
katne

M  
zami  
stokr  
i po  
zmni  
gure

*O Równoległobokach i Trójkątach 6;*

rokacie uczyniony: a drugi równy w powierzchni Trójkątowi: do którego wchodzącemu także w Czworokąt i onęgo dopełniającemu.

Niech będzie naprzykład ABCD Czworokąt dany; poprowadziwszy przekątną BD, i od niej równoległą CE; przez wierzchołek C, kąta DCB; gdy bok AB Trójkąta drugiego w Czworokacie pociągniemy aż do zeyścia się z równoodległą CE w punkcie E; zrobi si Trójkąt ADE równy co do powierzchni Czworokątowi ABCD.

Táb. Vŕ.  
Fig. 2.

101. *Uwaga.* Tym sposobem postąpimy sobie, chcąc zmniejszyć jednym bokiém Figurę iaką prostokreślną, bez odmienienia iey powierzchni. Poprowadzimy naprzód przekątną, któraby odcięta Trójkąt ieden w Figurze podaney; potem przez wierzchołek tego Trójkąta pociągniemy równoodległą od téy przekątney, aż do zeyścia się téżże równoodległej z bokiém drugim przyległym do przekątney; naostatek złączymy punkt przecięcia z drugim końcem téżże przekątney.

Możná nawet użyć sposobu tego do zamiénienia iakiéykolwiek Figury prostokreślnéy, na Trójkąt téżże saméy, co i podaná Figura powierzchni; a to zmniejszając naprzód iednym bokiém Figurę podaną: potem odeymuiąc znowu bok

bok iedny, zmniejszony inż iednym bokiem Figurze i t. d. póty, póki do trzech tylko boków, toiest do Tróykąta nie przydzielmy.

Táb. VI. *Przykład.* Niechby trzeba zamiénic Fig. 3. Pięciokąt ABCDE na Tróykąt téż saméj powierzchni.

Poprowadźmy przekatné: DB, DA, przez C i E pocięgniemy równoodległé CG, EF, aż do ich zeyścia się z linią AB przedłożoną w Punktach G i F: złączmy té punkta z końcami przekatnych, przez DG i DF. Tróykąt DFG będzie równy w powierzchni Pięciokątowi danému.

102. *Wniosek.* Widzieliśmy, (99.) że Tróykąt może bydź zamiéniony na Równoległobok prostokątny, mający tę samę co i Tróykąt powierzchnią; a zatem można każdą Figurę prostokréslną zamiénic zawsze na prostokąt nie różniący się od niéy w powierzchni, mogąc iż piérwéy zamiénic na Tróykąt.

103. *Uwaga.* Niechby nám podano dwie iakie Figury prostokréslné, którebyśmy inż zamiénili obiedwie na Prostokąty; i niechby té dwa prostokąty miały albo podstawy, albo wysokości równé. Łatwo nam będzie zrobić taki znowu prostokąt, któryby równy był

w po-

## O Równoległobokach i Trójkątach 67

w powierzchni, summie albo różnicy tych dwóch Figur podanych. Prostokąt albowiem, któryby miał podstawę równą summie albo różnicy Podstaw w obudwóch mniejszych Prostokątach (gdymy ich wysokości były równe), i tę samą co one wysokość, byłby równy w powierzchni summie tych Figur, lub ich różnicy. Wkrótce się i toż pokaze, iż można zamienić Prostokąt jeden na drugi, któryby był pierwszemu równy w Powierzchni, a miał w sobie bok jeden dany: a zatem można zawsze dwa Prostokąty do tego celu prowadzić, aby miały jeden bok równy w obudwóch; przeto można zawsze i Prostokąt taki zrobić, któryby równy był w powierzchni dwóm albo więcej Figurom prostokreślnym podanym.

104. *Twierdź. 5.* W jakimkolwiek Prostokącie; poprowadziwszy przekątną, przez ię punkt którykolwiek pociągąwszy dwie równoodległe od boków prostokąta, będą równe w powierzchniach dwa prostokąty, przez te równoodległe zrobione, a stykające się w wierzchołku dwóch kątów przeciwnych.

Niech będzie Prostokąt ABCD, przez punkt E, przekątnę poprowadziwszy  
 Tab. VI.  
 równoodległe HF, GI; Prostokąty HEGD, Fig. 4.  
 FEIB będą równe w powierzchniach.

Ea

Du



Dowodź: Trójkąty  $ACD$ ,  $CAB$ , są równe. Pierwszy składa się z Trójkątów  $CEG$ ,  $EAH$ , i z Prostokąta  $HEGD$ . Drugi składa się z Trójkątów  $ECF$ ,  $AEI$ , i z Prostokąta  $FEIB$ . Aż Trójkąt  $CEG$ , równy jest Trójkątowi  $ECF$ , a Trójkąt  $EAH$ , równy Trójkątowi  $AEI$ ; więc i Prostokąt  $HEGD$ , równy będzie Prostokątowi  $FEIB$ .

Twierdzenia podobnego poprzedzającemu, gdy równoległobok nie będzie prostokątny, tymże samym sposobem, dowieść można.

105. Zagadn. 5. Dany Prostokąt zamienić na inny téż samę powierzchnią, któryby miał za bok, linią daną.

Táb. VI. Niech będzie Prostokąt  $ABCD$ ; ten zamienić trzeba na inny, w którymby linią daną za bok służyła.

Rozwiąz: Pociągniemy dalej bok  $AB$ , aż do  $E$ , tak, aby linią  $BE$ , równą była linii daney. Dopelnimy Prostokąta  $BEFC$ , i poprowadźmy przekątną  $FB$ , któraby spotkała w punkcie  $G$ ; bok przedłużony  $AD$ ; weźmy potem  $FI$ , równą  $DG$ , i łączmy punkta  $G$ , i  $I$ , linią  $GI$ . To uczyniwszy, Prostokąt  $EBHI$ , równy będzie co do powierzchni Prostokątowi  $ABCD$ , i za bok ma linią daną  $BE$ . Że równe są te dwa Prostokąty, można okazać

*O Równoległobokach i Trójkątach 69*

zać podobnym iak w ostatnim twierdzeniu sposobem.

106. *Uwaga 1.* Aby dodać dwa Prostokąty mające boki odmiennie; trzeba na-przód ieden z tych prostokątów zamienić na inny równy z nim powierzchni, i któryby miał bok ieden równy bokowi prostokąta drugiego nie zamienianego. Wziąwszy potem za wysokość, ten bok równy w dwóch Prostokątach, a za Podstawę, sumnę dwóch innych boków odmiennych; zrobi się Prostokąt równy co do powierzchni sumnie dwóch Prostokątów danych. Podobnie się postępuje, chcąc mieć ich różnicę.

107. *Uwaga 2.* Gdyby Prostokąty dane były Kwadratami, a Prostokąt równy ich sumnie miał też bydź Kwadratem; poprzedzające wiadomości nie dosyć byłyby na rozwiązanie tego zagadnienia. Niżej obaczymy, iak sobie w takim razie postąpić trzeba. (Obacz w Rozdz: VIII.)

108. *Przystosowanie.* Nie powtarza się tu, co się już powiedziało w Aytmetryce o mierzeniu Prostokątów, których boki są w liczbach, wyrażone. Przystosowanie terazniejsze ciągnąć się będzie do Równoległoboków iakichkolwiek, i do Trójkątów, wyrażając podstawy ich i wysokości w liczbach.

Aby

76 GEOMETRII CZĘŚĆ I. ROZDZIAŁ V.

Aby dojść do powierzchni Czworokąta, którego przekręca i prostopadła od wierzchołka kana iey przeciwnego spuszczone, w liczbach jest dana; trzeba rozmnożyć tę przekręca przez połowę summy obu dwóch prostopadłych; albo połowę przekątney, przez sumnę tychże prostopadłych; albo nakoniec całą przekątne przez całą sumnę prostopadłych rozmnożyć, i rozmnożoney liczby wziąć połowę. Gdyby Czworokąt miał dwa boki równoodległe; powierzchnia jego byłaby równa Prostokątowi mającemu za wysokość odległość tych dwóch Równoległych, a za Podstawę połowę summy dwóch boków przeciwnych Czworokąta, których wiemy odległość.

Tab. VI. Przykłady. 1. Niech będzie ABCD, Fig. 6. Równoległobok Pochyło-kątny (obliquangulum) którego Podstawa AB, ma długości łokci 37. a wysokość DE łokci 20; powierzchnia jego będzie  $20 \times 37 = 740$ . łokci kwadratowych.

2. Niech powierzchnią Równoległoboku ABCD zawiera łokci kwadratowych 378. Podstawa AB, niech ma długości łokci 27. wysokość DE, będzie  $\frac{378}{27} = 14$ . łokci.

3. Niech będzie powierzchnią Równoległoboku ABCD = 544. łokci kwadratowych; wysokość DE = 17. łokci. Podstawa AB, będzie  $\frac{544}{17} = 32$ . łokci.

O Równoległokach i Trójkątach 71

4. Niech znówu Równoległok  
 ABCD podstawa będzie łokci 23. stóp 1.  
 cał. 10. to jest 23.  $\frac{1}{12}$  łokci, wysokość DE  
 łokci 14. stóp. 1. cał. 8. to jest 14.  $\frac{5}{6}$   
 łokci; powierzchnią będzie 14.  $\frac{5}{6}$  razy  
 23.  $\frac{11}{12}$  = 354.  $\frac{35}{12}$  łokci kwadr. = 354.  $\frac{35}{12}$  łokci kw.  
 3. stóp. 8. cał:

5. Niech powierzchnią Równoległoko-  
 ku ABCD będzie = 8433. sznur: kwad:  
 72. pret: kw. = 8433. 72. sznur: kwad:  
 podstawa AB = 153. sznur: 9. pret: = 153.  
 9. sznur: wysokość DE, będzie =  $\frac{8433 \cdot 72}{153}$   
 = 54. 8. sznur = 54 sznur: 2. pret:

6. Niech powierzchnią Równoległoko-  
 ku ABCD, będzie = 315, 3.  $\frac{1}{12}$  łokci kw.  
 = 315.  $\frac{245}{288}$  łokci kw. wysokość DE =

Łok. St: Cál:  
 15. 1. 10. = 15.  $\frac{11}{12}$  Łok:  
 Lok: 1- Łok.  
 podstawa będzie =  $\frac{90965}{4584}$  = 19.

Stóp: 1. 8.  $\frac{49}{191}$  Cál:

7. Niech będzie ABC Trójkąt, któ- Tab. VII.  
 régo podstawa AB, = 28 łokci, a wyso- Fig. 2.  
 kość CD = 16. łokci. Powierzchnią jego  
 będzie połową 28. przez 16. rozmnożo-  
 nych czyli =  $\frac{28 \cdot 16}{2}$  = 28 x 8. = 224. Łok:

kw: 8.



72 GEOMETRII CZĘŚĆ I. ROZDZIAŁ V.

8. Niech będzie powierzchnią Trójką-  
ta  $ABC = 156$ . stóp. kw: a podstawa  $AB =$   
24. stóp. wysokość  $CD$ , będzie  $= \frac{156}{\frac{1}{2} \times 24.} =$

$$\frac{312}{24.} \text{ albo } \frac{156}{12.} = 13. \text{ stóp.}$$

9. Niech będzie powierzchnią Trójką-  
ta  $ABC = 105$ . ł. kw: a wysokość  $CD =$   
15. łokci. Podstawa  $AB$  będzie  $= \frac{125}{\frac{1}{2} \times 15}$   
 $= \frac{370}{15.} = 26. \text{ ł. kw:}$

10. Niech będzie  $ABC$  Trójkąt, któ-  
rego podstawa  $AB = 12, 2, 4.$   
 $= 12.$   $\frac{5}{18.}$  pret: Wysokość  $= 7.$   $\frac{5}{6.}$  pret: po-  
wierzchnia będzie  $= 7.$   $\frac{5}{6.} \times 6.$   $\frac{5}{36.} =$   
 $48.$   $\frac{19}{216.}$  pret: kw:  $= 48.$  pret: kw: 4. łok.  
kw: 3. stóp. 114. cal: kw:

11. Niech będzie powierzchnia Tróy-  
kąta  $ABC = 25.$   $32.$   $= 25$   $\frac{1}{8.}$   
podstawa  $AB = 9.$   $2.$   $8.$   $= 9.$   $\frac{1}{9.}$   
wysokość  $CD$  będzie  $= \frac{451}{32.} = 5.$  ł. 1. sto:

12. Niech będzie powierzchnią Tróy-  
kąta  $= 21.$  szn: kw: 17. pret: kw: Wyso-  
kość

**0 Równoległobokach i Trójkątach 72**

kość  $CD=5$ . szn: 8. przęt: podstawa  $AB$ .  
 będzie  $=\frac{21, 17}{2, 9}$ , albo  $\frac{42, 34}{5, 8}=7, 3$ . szn: 7.  
 szn: 3. przęt:

13. Niech będzie *Różnobok* (Trapezium)  $ABCD$  mający tylko równoodległe boki  $AB, CD$ ; bok  $AB=35$ . łok.  
 bok  $CD=17$ . łok.

Táb. VII.  
Fig. 2.

A zatem summa ich  $=52$ .

Wysokość  $DE = 14$ .

Powierzchnia tego Czworokąta będzie  
 $=\frac{14 \times 52}{2} = 7 \times 52$ , albo  $14 \times 26 = 364$ . ł.kw:

14. Aby powierzchnia takiego Czworokąta zawierała 255. cal: kw: którego boki dwa równoległe są:  
 jeden  $AB=23$ . cal:  
 drugi  $CD=11$ .

A zatem summa  $=34$ .

trzeba mu dać wysokość  $=\frac{255}{17} = \frac{510}{34} =$

15. cal.

15. Aby zaś powierzchnia takiego Czworokąta zawierała 325 Stóp: kw: gdy podstawa  $AB=31$ . stóp, a wysokość  $ED=13$ . trzeba, aby summa boków równoodległych była  $=\frac{325}{1} = \frac{650}{13} = 50$ .

stóp. A że bok  $AB=31$ . stóp. więc  $CD$  będzie  $=19$ . stóp.

74 GEOMETRYI CZĘŚĆ I. ROZDZIAŁ V.

16. Niech w takowym Czworokącie ABCD boki równoległe będą,

$$\begin{array}{rcl} AB = & 20. & \text{pręt: 10. 1. 1. 1. c. cal.} \\ CD = & 12. & \text{5. 1. 1. 1.} \end{array}$$

$$\text{A zatem summa} = 34. \quad 2. \quad 1. \quad 10. =$$

$$34. \frac{1}{18} \text{ pręt:}$$

$$\text{Wysokość DE} = 9. \quad 5. \quad 1. \quad 8. =$$

$$9. \frac{7}{10}.$$

$$\text{Powierzchnia będzie} = 9. \frac{7}{10} \times 17. \frac{7}{10} =$$

$$168. \frac{12}{31} \text{ pręt: kw: } 169. \text{ pręt: kw: } 6. \text{ lok: kw:}$$

$$\text{st: kw: } 112. \text{ cal: kw:}$$

Táb. VII.

Fig. 3.

17. Niech będzie Czworokąt iakikolwiek ABCD, którego przekatná DE=86. łokci; prostopadłe zaś do nięcy spuszczone,

$$AF=19.$$

$$CF=25.$$

$$\text{A zatem ich summa } AF+CF=64. \text{ łok:}$$

$$\text{Powierzchnia tego Czworokąta będzie} =$$

$$\frac{64 \times 86}{2} = 32. \times 86. \text{ albo } 64. \times 43. = 2752. \text{ łokci kw:}$$

$$18. \text{ Niech znówu będzie przekatná AB} = 26. \text{ szn: } 8. \text{ pręt: } 6. \text{ łok: } = 26. \frac{22}{25} \text{ szn:}$$

$$\text{Prostopadłe: AE}=13. \text{ szn: } 7. \text{ pręt: } 5. \text{ łok:}$$

$$CF=11. \quad 9. \quad 6. \frac{1}{2}.$$

$$\text{A zatem } AF+CF=25. \quad 7. \quad 4.$$

$$= 25. \frac{113}{150} \text{ sznur:}$$

$$\text{Powierzchnia Czworokąta ABCD będzie} = 25. \frac{113}{150} \times 13. \frac{11}{25} = 346. \frac{78}{625} \text{ szn: kw:}$$

*O Równoległobokach i Trójkątach 75.*

19. Niech w Pięciokącie ABCDE bę- Táb. VII.  
dzie bok - AE = 128. łok: Fig. 4.

Przekątne:  $\begin{cases} AC = 79. \\ CE = 81. \end{cases}$

Prostopadłe:  $\begin{cases} CH = 49. \\ EV = 42. \\ DG = 39. \end{cases}$

Znáydzíemy Powierzchnie Trójkątów:

$$\begin{cases} AEC = 49 \times 81 = 3969. \text{ łok: kw:} \\ ABC = 79 \times 49 = 3881. \\ EDC = \frac{81 \times 39}{2} = 1579. \frac{1}{2}. \end{cases}$$


---

A zatém Powierzchnia Pięciokąta ABCDE będzie = 6374.  $\frac{1}{2}$  łok: kw:

20. Niech w Sześciokącie ABCDEF, będa Táb. VII.  
Fig. 5.

Przekątne.  $\begin{cases} AC = 200. \text{ łok:} \\ AE = 125. \end{cases}$

Prostopadłe  $\begin{cases} FG = 23. \\ DH = 80. \frac{1}{2} \\ DI = 64. \frac{3}{4} \\ FK = 42. \end{cases}$

A zatém  $BC + DH = 103. \frac{1}{2}$  łok:

$$DI + FK = 106. \frac{3}{4}$$

Znáydzíemy Powierzchnie Czworokątów:

$$\begin{cases} ABCD = 103. \frac{1}{2} \times 100 = 10350. \text{ ł.kw:} \\ ADEF = 53. \frac{3}{8} \times 125 = 6671. \frac{3}{8}. \end{cases}$$


---

Po-



76 GEOMETRY CZĘŚĆ I. ROZDZIAŁ V.

Powierzchnia tedy całego

Sześciokąta będzie = 17021. $\frac{7}{8}$  łok: kw:  
Inaczej następującym sposobem znaleźć  
można Powierzchnią Sześciokąta:  
ABCDEF.

Táb. VII. Niech będzie

Fig. 6.

szn: prz: łok:  
bok AB = 20. 0. 0.

Równoodległe Części Prostopadłej DN.

}	FG = 23. 7. 3. $\frac{1}{8}$ .	
	CH = 23. 2. 2. $\frac{13}{16}$ .	
	EI = 12. 2. 2. $\frac{3}{16}$ .	= 12. $\frac{11}{48}$ Sz:kw.
	DK = 2. 4. 7. $\frac{7}{24}$ .	= 2. $\frac{179}{360}$ .
	KL = 4. 6. 6. $\frac{1}{4}$ .	= 4. $\frac{41}{60}$ .
}	LM = 1. 0. 3. $\frac{8}{4}$ .	= 1. $\frac{7}{26}$ .
	MN = 7. 8. 5. $\frac{5}{6}$ .	= 7. $\frac{79}{98}$ .

A zatem AB+FG = 43. 7. 3. $\frac{1}{8}$  = 43. $\frac{87}{20}$ .

FG+CH = 46. 9. 5. $\frac{15}{16}$  = 46. $\frac{47}{48}$ .

CH+EI = 35. 4. 5. = 35. $\frac{5}{17}$ .

Więc Trójkąt DEI = 1. $\frac{179}{720}$  × 12. $\frac{11}{48}$  =

1. $\frac{9313}{34560}$  szn: kw:

Czwo-

kw:  
znaleźć

O Równoległobokach i Troykątach 77

Czwo-  
rokąty.  $\left\{ \begin{array}{l} EICH = 2 \cdot \frac{41}{120} \times 35 \cdot \frac{7}{15} = 83 \cdot \frac{23}{450} \\ CHFG = 1 \cdot \frac{1}{20} \times 23 \cdot \frac{47}{90} = 24 \cdot \frac{85}{128} \\ ABGF = 3 \cdot \frac{162}{180} \times 43 \cdot \frac{82}{120} = 172 \cdot \frac{6341}{21600} \end{array} \right.$

Sz: kw:

Cały więc Sześciokąt ABCDEF =  $295 \frac{641}{2352}$

21. Niech będzie Siedmiokąt ABCDEFG, Tab. VIII  
w którym następujące wymiary znaleźli. Fig. 1.  
śmy toiest:

Części przekątny AD:  $\left\{ \begin{array}{l} AH = 32 \frac{2}{3} \text{ stopy} \\ HI = 35 \\ IK = 15 \frac{1}{3} \\ KL = 81 \frac{5}{6} \\ LM = 11 \frac{5}{6} \\ MD = 13 \frac{1}{3} \end{array} \right.$

z:kw.

Prostopadłe:  $\left\{ \begin{array}{l} GH = 78 \frac{1}{2} \\ BI = 56 \frac{1}{3} \\ FK = 64 \\ EL = 86 \frac{1}{3} \\ CM = 45 \frac{1}{6} \end{array} \right.$

stóp: kw:

Będą

# 78 GEOMETRII CZĘŚĆ I. ROZDZIAŁ V.

$$\begin{array}{l} \text{Będą} \\ \text{tedy} \\ \text{Trójk.} \\ \text{kąty:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{AHG} = 16\frac{1}{3} \times 72\frac{1}{2} = 1282\frac{1}{6} \\ \text{ABI} = 28\frac{1}{6} \times 57\frac{1}{3} = 1595\frac{17}{18} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{czwo-} \\ \text{rol. d-} \\ \text{ty:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{DLE} = 43\frac{1}{6} \times 27\frac{1}{6} = 1086\frac{12}{36} \\ \text{CMD} = 6\frac{2}{3} \times 47\frac{1}{3} = 307\frac{5}{9} \\ \text{HAG} = 25\frac{1}{6} \times 142\frac{1}{2} = 3563\frac{1}{2} \\ \text{KLEF} = 81\frac{1}{6} \times 75\frac{1}{6} = 6151\frac{1}{6} \\ \text{BCMI} = 109\frac{1}{2} \times 51\frac{1}{2} = 5568\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

A zatem cały Siedmiokąt ABCDEFG =  
12685 $\frac{1}{2}$  stóp kw:

## PRZYGOTOWANIE DO ROZ- DZIAŁÓW NASTĘPUJĄCYCH

*O podniesieniu liczby do Kwa-  
dratu i wyciągnięciu z niej pier-  
wiastku kwadratowego.*

**L**ubo nauka, która się tu wykladać  
będzie, ma częste używanie w wy-  
szych rachunkach; bardziej jednak jest  
potrzebna w Geometrii. W następują-  
cych Rozdziałach, różne zdarzą się uży-  
cia i okoliczności. Tam fundamenta,  
na których się zasniedzą, iśnić zrozumu-  
miané będą, niż gdyby na zawilśzych  
działaniach rachunkowych były okazane  
zwł.

O Ró  
zwl  
iest n

IO  
sama  
Okr  
re  
roz  
wielk  
I tak

1. 2

3. 4

10. 20

100. 400

1000

10000

100000

I  
liczb,  
zerów  
mów  
zerów

II  
naprzy  
mnoży  
bi się  
przez  
różn  
ży się  
Kwad  
żona  
dmu,

## O Równoległobokach i Trójkątach 79

zwłaszcza, gdy jeszcze algebrą ucznióm.  
jest nieznaną.

109. D. fin: Kwadrat liczby; jestto ta  
sama liczba przez siebie rozmnożoną.  
Okazać to można z Geometrii, w któ-  
réy aby znaleźć pole Kwadratu; trzeba  
rozmnożyć przez siebie liczbę znaczącą  
wielkość boku tegoż Kwadratu.  
I tak dziewięciu liczb pierwszych:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	Kwadra- ty są:
1.	4	9	16	25	36	49	64	81.	Liczb: Kwadra- ty są:
10.	20.	30.	40.	50.	60.	70.	80.	90.	Tych też Kwadra- ty będą.
100.	400.	900.	1600.	2500.	3600.	4900.	6400.	8100	
1000.	2000.	3000.	4000.	5000.	6000.	7000.	8000.	9000.	
10000.	20000.	30000.	40000.	50000.	60000.	70000.	80000.	90000.	

110. Stąd się wnosi, że kwadraty  
liczb, które jedną cyfrę mają, a resztę  
zerów, składają się z kwadratu téż saméj  
cyfry, i z tylé dwoie następujących  
zerów, ile ich było w téj liczbie.

111. Gdy się robi Kwadrat z liczby,  
naprzykład z 37, mnożąc 37. przez 37;  
mnoży się naprzód 7. przez 7. to jest ro-  
bi się Kwadrat z 7. potem mnoży się 30.  
przez 7. dalej 7. przez 30. albo drugi  
raz znowu 30. przez 7. naostatek mno-  
ży się 30. przez 30. to jest bierze się  
Kwadrat z 30. Jest tedy liczba rozmno-  
żona 1369. kwadratem trzydziestu sie-  
dmu, złożonym z kwadratu trzydzie-  
stu,



80 GEOMETRYI CZĘŚĆ I. ROZDZIAŁ V.

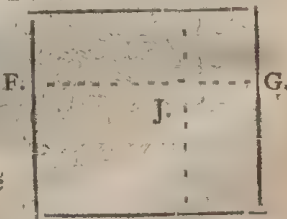
stu, z liczby 30. rozmnożonej dwa razy przez 7. i z kwadratu 7. Ta reguła jest ogólna ścigająca się do kwadratów liczb wszystkich, które na dwie części podzielić można.

Niech będzie naprzykład liczba 5, którą uważam iak złożona z 1. i z 4. Kwadrat iey może być uważany, iakby się składał z tych trzech liczb: 1. 8. i 16. Pierwszą 1. iest kwadratem z 1. drugą 8. iest liczbą rozmnożoną dwa razy z 1. przez 4. trzecią 16. iest kwadratem z 4. Iakoż summa tych trzech liczb 1. 8. 16. iest: 25. a 25. iest kwadratem z 5. Gdybyśmy uważali 5. iako zbiór z tych dwóch liczb 2. i 3; kwadrat z 5. brałby się tēm samēm za sumę z tych trzech liczb: 4. 12. 9. którą summa iest także 25. Liczba 4. byłaby kwadratem z 2. liczba 12. byłaby z rozmnożenia dwa razy 2. przez 3, a liczba 9. byłaby kwadratem z 3.

D. \_\_\_\_\_ K. \_\_\_\_\_ C. \_\_\_\_\_

Toż samo widocznie pokazać się może sposobem Geometrycznym:

Niech linią  $AB$  będzie na mieyscé liczby iakiéy składowej się z tytu  $A$  —  $E$  —  $B$ . Jedności, ile pewnych części zamykają w sobie też linią  $AB$ . Linié téy części:  $AE$ ,



*O Równoległobokach i Troykątach 81*

AE, EB, niech zastępują części dwie, które tę liczbę składają: zrobimy kwadrat ABCD z linii AB, a wziąwszy linią AF równą AE, pociągniemy przez F i E dwie linie FG, i EK, równoodległe od boków kwadratu, i przecinające się w punkcie J. Kwadrat AEIF, będzie z części AE, linii AB. Kwadrat IGCK, będzie z części EB, linii także AB. Prostokąty: FIKD, EBGI, będą obadwa z linii: AE i EB, to jest z części iedney, linii AB i z części drugiey.

112. Wygodną rzecz iest, liczbę, której kwadratu szukamy, rozłożyć na iedności, dziesiątki, sta, i t. d.

*Przykład 1.* Chcę mieć kwadrat z 24.

Rozkładam tę liczbę na dziesiątki, i na iedności, to jest na 20. i na 4.

Będzie 1. 400. kwadrat z dziesiątków,

2. 160. liczba dwa razy rozmnożona z dziesiątków przez iedności.

3. 16. Kwadrat z iedności.

Summa = 576. Kwadrat z 24.

*Przykład 2.* Chcę mieć kwadrat z 36.

1. 900. Kwadrat z 30.

2. 360. dwa razy 30. przez 6. rozmnożone.

3. 36. Kwadrat z 6.

Summa = 1296. Kwadrat 36.

F Przy-

Przykład 3. Chcę mieć Kwadrat z 324.

1. 90000. Kwadrat z 300.
2. 12000. Dwa razy 300.  
przez 20.
3. 400. Kwadrat z 20.
4. 2560. Dwa razy 320.  
przez 4.
5. 16. Kwadrat z 4.

Summa --- 104876. Kwadrat z 324.

Przykład. 4. Chcę mieć Kwadrat z 4687.

1. 16000000. Kwadrat z 4000.
2. 4800000. Dwa razy 4000.  
przez 600.
3. 360000. Kwadrat z 600.
4. 736000. Dwa razy 4600.  
przez 80.
5. 6400. Kwadrat z 80.
6. 65520. Dwa razy 4680.  
przez 7.
7. 49. Kwadraty z 7.

Summa --- 21967969. Kwadrat z 4687.

113. Uwaga 1. Postrzedz latwo możemy w tych przykładach, że każda liczba składająca po części kwadrat cały, ma jednem zero mniej, niżeli ta, która ją poprzedziła; a zatem cyfra jedna w każdym liczbie niższy występuje bardziej ku prawey ręce, niż w téj, która jest nad nią.

Wi-

O Równ

Widz  
zera, p  
iedné po  
dzie niż  
róż bard  
wszy ze  
porządk

Sun

2. W

16. opus  
16. zna  
drat z 4  
wéy ręce  
rzedzie g  
pięć, a  
kroć sto  
pod jedn  
puie. T  
mnożeni  
ku 4, li  
tęży lic  
cim rzed  
a. zatem  
i 6. dzie  
piszą się

## O Równoległobokach i Troykątach 83

Widzimy zatem, że możnaby opuścić zera, pisząc cyfry samé tym sposobem jedné pod drugiemi, aby w każdym rzędzie niższym, cyfra jedna w prawą stronę bardziey wychodziła. I tak opuściwszy zera w przykładzie ostatnim tym porządkiem szłyby samé cyfry.

16:

48:

36:

736:

64:

6552:

49:

Summa 21 967 969.

2. W pierwszym rzędzie, gdzie jest 16. opuszczają się zerów sześć, a zatem 16. znaczy 16. millionów, to jest Kwadrat z 4000. czyli z pierwszego po lewej ręce znaku liczby 4687. W drugim rzędzie gdzie jest 48. opuszczają się zerów pięć, a zatem 48. znaczy 4. milliony 8. kroć stotysięcy, i dla tego 4. piszą się pod jednościami millionów, a 8. występuje. Ta zaś liczba 48. pochodzi z rozmnożenia pierwszego po lewej ręce znaku 4, liczby 4687. przez drugi znak 6, téżże liczby dwa razy wzięty. W trzecim rzędzie opuszczają się zerów cztery, a zatem 36. znaczy trzykroć sto tysięcy, i 6. dziesiątków tysięcy, i dla tego 3. piszą się pod stoma tysiąców, a 6. wy-

Pa                      stę



stępuje. Ta zaś liczba 36. znaczy kwadrat drugiego po lewéj ręce znaku 6. liczby 4687. W czwartym rzędzie opuszcza się zerów trzy, a zatem 736. znaczy siedmkróć trzydzieści sześć tysięcy: i dla tego 3. piszą się pod dziesiątkami tysięcy, a 6. występuje. Ta zaś liczba 736. pochodzi z rozmnożenia dwóch pierwszych po lewéj ręce znaków 46. liczby 4687, przez 8, trzeci znak teyże liczby dwa razy wzięty i t. d.

3. W takowém liczb ułożeniu, idąc od dołu do góry, toiest zaczynając od 49; i pierwszym rzędzie, pierwszą po prawéj ręce cyfrą 9. znaczy jedność; w drugim rzędzie 2. znaczy dziesiątki; w trzecim rzędzie 4. znaczy sta; a w czwartym rzędzie 6. znaczy tysiące, i t. d.

4. Ta sama liczba 49. w pierwszym od dołu rzędzie znaczy kwadrat z jedności 7; i prawą ię cyfrą 9. náybardziéj występuje. Trzecią w tym porządku liczba 64. iest kwadratem z dziesiątków 8, i przeto prawą ię cyfrą 4. iako znaczącą sta; mniéj występuje, niżeli obiedwie cyfry 49. kwadratu z samych jedności. Piątą w porządku liczba 36. iest kwadratem ze stów 6: i przeto prawą ię cyfrą 6. iako znaczącą dziesiątki tysięcy, ma przed sobą kwadraty z dziesiątków i z jedności. Na koniec siódma i náywyższa liczba

## O Równoległobokach i Trójkątach 85

liczba 16. jest kwadratem z tysięcy 4. i przeto prawą ię cyfra 6. ma przed sobą kwadraty ze stów, dziesiątków i jedności. W summie więc 21,967,969. na miejscach nie parzystych, od prawej ręki rachując kończyć się będą kwadraty z liczb pojedynczych, z których się składa cały kwadrat: to jest kwadrat z jedności kończyć się będzie tam, gdzie ostatnie po prawej ręce 9. napisane: kwadrat z dziesiątków tam, gdzie jest drugie 9; kwadrat ze stów tam, gdzie jest 6; kwadrat z tysięcy, gdzie 1.

5. Dla podobnej przyczyny w summie téż 21 967 969. kwadrat wyrażający (rachując zawsze od prawej ręki) na miejscach parzystych, drugim, czwartym, szóstym i t. d. kończyć się będą liczby pochodzące z rozmnożenia pojedynczych znaków, z których kwadrat urósł, przez te wszystkie, które idą poprzedzały.

Trzeba to jeszcze bardziej objaśnić na wielu innych przykładach kwadratów, tymże samym, co wyżej, porządkiem części ich układając.

114. *Wniosek 1.* Gdy tedy mamy liczbę jaką kwadratową, możemy doysść z jak wielu znaków liczebnych przez siebie rozmnożonych urósł ten kwadrat: to jest, możemy doysść wielości znaków pier-

piérwiastku kwadratowego. Po Łacinie taki piérwiastek zowie się (*Radix quadrata*.) Doydziemy zaś tego, oddzielając króskami albo kropkami od prawey ręki zaczawszy po dwa znaki liczebne. Liczba takich oddziałów pokáže wielość znaków liczebnych piérwiastku. Na przykład liczba 576, będzie miała dwa oddziały, które tak oznaczam 5,76. a zatem piérwiastek iey z dwóch się skłádá znaków. Piérwiastek téy liczby 10,49,76, będzie miał trzy znaki liczebne, bo w niéy trzy oddziały zrobić można. Piérwiastek liczby 21,967 969, mieć będzie cztery znaki, bo cztery także w nim oddziały uczynić można, i t. d.

115. Wniosek 2. Ponieważ w miejscach nie parzystych liczby kwadratowej, kończą się kwadraty znaków pojedynczych tę liczbę składających, mogą zaś znaki liczebne w kwadracie być nie parzyste, więc w takim razie, w piérwszym zaraz od lewéy ręki znaku kwadratu, znaleźć można znak piérwszy piérwiastku tegoż kwadratu: a zatem oddzielając króskami co dwie liczby, od prawey ręki do lewéy, na ostatni oddział, może tylko przypaść znak ieden liczebny. Tak, iakéśmy wyżej widzieli w tym kwadracie 5,76.

PRZY-

116. Niechby z téy saméy liczby: 576. wyciągnąć trzeba było pierwiastek kwadratowy. Ta liczba mogąc mieć dwa oddziały, będzie też miała dwa znaki w pierwiastku, to jest znak dziesiątków, i znak jedności. Pierwszy znak pierwiastku taki być powinien, aby kwadrat jego nie przechodził 5. stów: taki kwadrat iest 4. sta, albo 400, którego pierwiastek 2. dziesiątki, albo 20. Kwadrat 400. pierwszego tego znaku pierwiastkowego 20., odiawszy od 576. zostanie 176. Ta reszta pozostała powinna jeszcze zamykać w sobie drugi znak pierwiastku rozmnożony przez pierwszy 20. dwa razy wzięty, i nad to kwadrat tegoż drugiego znaku: więc jeżeli przez tenże znak 20. dwa razy wzięty, to jest przez 40. podzielimy resztę 176, wieloraz pokaże drugi znak pierwiastku złożony z jedności. Podzieliwszy 176, przez 40. wieloraz będzie 4. jedności. Te 4. jedności rozmnożywszy przez 40, wypadnie 160, które 160, odiawszy od 176. zostanie 16. W téy reszcie 16. znaydować się jeszcze powinien kwadrat znaku pierwiastkowego jedności 4. to jest 16. a że się znaydnie zupełnie; więc cały pierwiastek kwadratu 576, będzie 24.



88 GEOMETRII CZĘŚĆ I. ROZDZIAŁ V.

Wzór działania.

$$\begin{array}{r}
 5,76 \overline{) 20.} \\
 4 \cdot 00 \text{ kwadrat z } 20. \\
 \hline
 40 \overline{) 176 \overline{) 4.}} \\
 160 \text{ z rozmnożenia } 40 \text{ przez } 4. \\
 \hline
 16. \text{ Reszta.} \\
 16. \text{ Kwadrat z } 4. \\
 \hline
 0.
 \end{array}$$

Tymże sposobem wyciągnąć można pierwiastek kwadratowy z tej liczby 144.

Wzór działania.

$$\begin{array}{r}
 1,44 \overline{) 10.} \\
 1 \cdot 00 \text{ kwadrat z } 10. \\
 \hline
 20 \overline{) 44 \overline{) 2}} \\
 40 \text{ z rozmnożenia } 20. \text{ przez } 2. \\
 \hline
 4. \text{ Reszta} \\
 4. \text{ Kwadrat z } 2. \\
 \hline
 0.
 \end{array}$$

Niechby potrzeba wyciągnąć pierwiastek, z kwadratu 692224.

Oddzieliwszy, iak wyżej, kreskami co dwie liczby od prawey ręki, będzie trzy oddziałów, a zatem i trzy znaki w pierwiastku. Kwadrat nąyblížey przystępujący do 69. jest 64, którego pierwiastek jest 8; więc 8 stów, będzie znakiem pierwszym pierwiastku. Odiąwszy kwadrat 8. stów, tojest 640 000. od 692 224. zostanie 52 224.

Ta

### *O Równoległobokach i Trójkątach 89*

Ta reszta powinna zamykać pierwszy znak 800 pierwiastku dwa razy wzięty, przez drugi znak dziesiątków rozmnożony, i kwadrat drugiego znaku pierwiastku: powinna jeszcze zamykać dwa te pierwsze znaki stów i dziesiątków rozmnożonych przez trzeci znak jedności dwa razy wzięty, i na koniec kwadrat znaku tegoż jedności. W szczególności zaś mówiąc, powinna zamykać 800. dwa razy wziętę, to jest 1600. rozmnożoną przez znak dziesiątków którego szukamy. Podzieliwszy tedy 52 224, przez 1 600. znajdziemy na wieloraz 30, albo 3. dziesiątki: a zatem 3 dziesiątki będą znakiem drugim Pierwiastku. 1 600. rozmnożone przez 30. czynią 48 000, które od 52 224 odjąwszy, zostanie 4 224. Ta reszta ma jeszcze zamykać kwadrat z 30, to jest 900, które 900. od 4 224. odjąwszy, zostanie 3 324.

Ta reszta powinna zamykać część pierwiastku znalezioną 830, dwa razy wziętą, i rozmnożoną przez znak jedności pierwiastku, i jeszcze zamykać powinna kwadrat tychże jedności. Podzielimy więc 3 324. przez 1 660. to jest przez 830. dwa razy wziętę, a wieloraz 2. będzie znakiem jedności pierwiastku. Przez tę 2. rozmnożywszy 1 660, i liczbę rozmnożoną: 3 320. odjąwszy od 3 324. zostanie 4, która to reszta jest kwadratem z 2. jedności. Cały więc pierwiastek kwadratu: 692 224. będzie 832.

Wzór

90 GEOMETRYI. CZĘŚĆ I. ROZDZIAŁ V.

Wzór działania.

$$\begin{array}{r} 692 \ 224 \ 800 \\ 640 \ 000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 600 \ 52 \ 224 \ 30 \\ 48 \ 000 \\ 4 \ 224 \\ 900 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 600 \ 3 \ 324 \ 2 \\ 3 \ 320 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{array}$$

Trzeba iako náywięcej takich przykładów Ucznióm podawać, nieużywając żadnego ieszcze skrócenia. Na wzór dwa się następujące przykłady podają.

Przykład I.

$$\begin{array}{r} 46,02,26,56 \ 6000. \\ 36 \ 00 \ 00 \ 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12000 \ 10,02 \ 26 \ 56 \ 700. \\ 8 \ 40 \ 00 \ 00. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 62 \ 26 \ 56 \\ 49 \ 00 \ 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13400 \ 1 \ 13 \ 26 \ 56 \ 80 \\ 1 \ 07 \ 20 \ 00. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \ 06 \ 56 \\ 64 \ 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13560 \ 5 \ 42 \ 56 \ 4 \\ 5 \ 42 \ 40 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ 0. \end{array}$$

Przykład II.

$$\begin{array}{r} 13,59,39,69 \ 3000 \\ 9 \ 00 \ 00 \ 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6000 \ 4 \ 59 \ 39 \ 69 \ 600. \\ 3 \ 60 \ 00 \ 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 99 \ 39 \ 69 \\ 36 \ 00 \ 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7200 \ 63 \ 39 \ 69 \ 80 \\ 57 \ 60 \ 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \ 79 \ 69 \\ 64 \ 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7360 \ 5 \ 15 \ 69 \ 7. \\ 5 \ 15 \ 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ 49 \\ 0 \end{array}$$

## O Równoległobokach i Trójkątach 91

117. Uwaga. Jako w dzieleniu zwy-  
czayném, tak i w wyciąganiu Pierwiastku  
kwadratowego, można się (kto ieszcze  
nie jest wprawnym) łatwo pomylić w zna-  
kach wie orazu. Omyłka w dzieleniu łat-  
wاً jest do poprawienia, gdy uważać bę-  
dziemy, ieżeli liczba dzieląca rozmnożo-  
na przez wieloraz odiać się może od czę-  
ści liczby podzielnicy, którą dzielić przy-  
pada, albo ieżeli reszta nie jest większą  
od liczby dzielącej. W wyciąganiu Pier-  
wiastku kwadratowego, (które wychodzi  
na iedno prawie co i dzielenie w którym-  
by liczba dzieląca co raz się odmieniała)  
można także omyłkę iakąkolwiek postrzedz  
podobną, iak przy zwyczajném dziele-  
niu; czyniąc uwagę, względ ieszcze i na  
to mieć należy, że wyciągając pierwiastek  
sposobem wyżey podanym, dwa się czy-  
nią odeymowania, toiest: odeymnie się  
naprzód liczba dzieląca przez część przy-  
padającą Pierwiastku rozmnożona; i po-  
wtóre odeymnie się kwadrat téyże części  
Pierwiastku: więc, gdyby zdarzyło się, że  
pierwsze tylko odiećie uczynić można; a  
drugiego iuż nie można; ostrzeżeni tém  
bylibysmy, żeśmy wzięli wieloraz bardzo  
wielki; a zatem zmniejszyć go potrzeba.  
W ostatnich dwóch przykładach, w pier-  
wszym, 12000, zmiesćić się mogło razy  
800 w 10022656; a w drugim 6000. mo-  
gło się znaydować 700 razy w 4593969;  
ale nie możnaby było od reszty odiać  
kwadraty tychże wielorazów, i przetośmy  
w obu-



w obudwóch tych przykładach jednością wieloraz zmniejszyli.

118. *Pierwsze*. Skrócenie, którego przy wyciąganiu Pierwiastku kwadratowego użyć można, jest w opuszczeniu zerów w liczbie dzielący, podzielny, i w wielorazie, zachowując jednak cyfrów pozostałym tę miejscą, któreby zastępować powinny, gdyby zera odcięte nie były.

119. *Powtórę*: Ponieważ ostatecznie po prawej ręce znaki kwadratu pożądanego do wyciągania Pierwiastku, wcale się nie odmieniają, po pierwszych odeymowaniach, nie są więc do nich potrzebne; zatem do każdego w szczególności odeymowania, można tę tylko cyfrę spuszczać z kwadratu, od których odeymować przypada liczbę dzielącą przez wieloraz rozmnożoną; zachowując im miejsce i znaczenie to samo, które miały w całym kwadracie.

120. *Potrzercie*. Zamiast dwóch odeymowań, naprzód liczby dzielący przez wieloraz rozmnożony, potem kwadratu tegoż wielorazu, można obadwa razem czynić odeymowania: kładąc znak znaleziony na wieloraz; nie tylko na zwyczajnem swoim miejscu; ale też przy końcu liczby dzielący, i dopiero tak powiększoną liczbę dzielącą mnożyć przez ten znak wielorazu, a rozmnożoną od liczb przypadających z kwadratu odeymować. Tu

## O Równoległobokach i Trójkątach 93

Tu na tych samych liczbach kwadratowych, z których, już uczniowie wyciągali pierwiastek, niechaj użyją tych trzech sposobów skrócenia: bo im już i działanie będzie łatwiejsze, i lepięj dokładność tego sposobu skróconego obaczą, porównyując działanie pierwsze z drugim.

121. Wyciągniemy tym skróconym sposobem pierwiastek  $\times$  kwadratowy z liczby 13593969.

Naprzód oddzielić trzeba króskami co dwie liczby: iak wyżej: oddzieliwszy tak liczby kwadratu podanego 13,59,39,69. widzimy, że ten kwadrat cztery znaki liczebne mieć będzie w swoim Pierwiastku. Kwadrat nabybliższy w pierwszym po prawej ręce oddziale zawarty, będzie 9, którego Pierwiastek, 3, znaczący tysiące. Odiawszy ten kwadrat 9. od 13. zostanie 4. do których przypisawszy oddział następujący 59, będzie 459. Podwóymy pierwszy znak Pierwiastku 3. i będzie 6. Té 6, w pierwszych dwóch znakach 45, liczby 459, znalazłoby się razy 7: ale mając wzgląd, że kwadrat tego wielorazu nie mógłby się potem odjąć, położymy tylko 6, na mi yscu wielorazu, i przypiszmy ie także do 6. liczby dzielącej. Rozmnożywszy 66. przez 6. i liczbę rozmnożoną 396, odiaawszy od 459, zostanie 63, do który reszty przypiszmy oddział kwadratu następu-

stepuiący 39; i dzielimy dalej 6339, przez dwa znaki Pierwiastku znalezione, 36, podwoiwszy je, toiest, przez 72. 72 w 633 znayduie się razy 8. Napiszmy 8. na wieloraz, i przypiszmy je do liczby dzielący 72. Rozmnożywszy 728, przez 8, będzie 5824, które odiawszy od 6339, zostanie 515. Dopiszmy do téy reszty, ostatni kwadratu oddział 69, i 51569. dzielimy przez podwóyną liczbę znaków Pierwiastku już znalezionych 368: toiest, przez 736. 786 w 5156, znaydziemy razy 7. Przypiszmy te 7. do 368, i do 736. Rozmnożywszy 7367. przez 7. i liczbę rozmnożoną 51569 odiawszy od 51569 nic nie zostanie: a zatem kwadratu podanego pierwiastek będzie 3687.

*Wzór działania.*

$$\begin{array}{r}
 13,59,39,69 \mid 3687. \\
 \underline{9} \\
 66 \mid 45,9 \\
 \underline{396} \\
 728 \mid 6339 \\
 \underline{5824} \\
 7367 \mid 51569 \\
 \underline{51569} \\
 0.
 \end{array}$$

122. *Wniosek.* Ponieważ wyniesienie iakięj liczby do kwadratu iest to iedno, co rozmnożenie téj liczby przez siebie same,

### O Równoległobokach i Trójkątach 9;

samę, czyli rozmnożenie dwóch liczb równych iednę przez drugą kwadrat; więc ułomku iakięgo, będzie ułomek, którego licznik, jest kwadratem licznika tamtego, a mianownik kwadratem mianownika ięgo. I tak kwadrat z  $\frac{1}{2}$ , jest  $\frac{1}{4}$  kwadrat z  $\frac{1}{3}$ , jest  $\frac{1}{9}$ . kwadrat z  $\frac{2}{3}$ , jest  $\frac{4}{9}$ ; kwadraty ułomków  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{3}{4}$  są  $\frac{1}{16}$ ,  $\frac{9}{16}$  i t. d.

Chcąc tedy, wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z ułomka podanęgo; trzeba osobno wyciągnąć go z licznika i z mianownika. I tak Pierwiastki kwadratowe tych ułomków;  $\frac{9}{16}$ ,  $\frac{16}{25}$ ,  $\frac{25}{36}$  i t. d.

są  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{4}{5}$ ,  $\frac{5}{6}$  i t. d.

123. Uwaga! Gdy się trafi wyciągać Pierwiastek kwadratowy z liczby mieszanę, toiest, złożonę z liczby całkowitę, i z ułomka; trzeba ją pierwéy obrócić na sám ułomek. Tak naprzykład chcąc wyciągnąć pierwiastek z  $2\frac{1}{4}$  liczba ta będzie iedno co ułomek  $\frac{9}{4}$  którego pierwiastek  $\frac{3}{2}$ , czyli  $1\frac{1}{2}$ . Liczba też:  $2\frac{7}{9}$  jest iedno co  $\frac{25}{9}$ , a zatem pierwiastek ięy  $\frac{5}{3}$ , czyli:  $1\frac{2}{3}$ . Liczba  $10\frac{6}{25}$  tylé znaczy co  $\frac{256}{25}$ , więc pierwiastek ięy:  $\frac{16}{5}$ , czyli  $3\frac{1}{5}$ .



O Jłościach niespółmiernych; i przybliżeniu Pierwiastków tych liczb, które nie są kwadratami.

124. *Uwagi.* 1. Niech będzie liczba  $z$ , z której przypada wyciągać Pierwiastek kwadratowy. Pierwiastkiem tej liczby nie będzie ani 1, ani 2; bo kwadrat z 1 jest 1, mniey od 2, a kwadrat z 2, jest 4, więcéy od 2. Więc Pierwiastek z 2, będzie między 1. i 2, a zatem będzie złożonym z jedności, i z ułamka, toiest: będzie liczbą mieszaną, którą na sam ułomek obrócić można.

125. Aby ułomek ten był prawdziwym Pierwiastkiem z 2, trzebaby, aby kwadrat jego równał się 2; a zatem aby kwadrat licznika jego był dwa razy większy od kwadratu mianownika. Znależby tedy potrzeba taki kwadrat, któryby dwa razy w sobie zamykał inny kwadrat: aże to iest nie podobną, zaraz się pokaże.

Każdą liczbą kończyć się musi na ieden z tych dziesięciu znaków: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Każdy zaś kwadrat inaczej kończyć się nie może, tylko na te znaki, na które kończą się kwadraty dziesięciu znaków dopiero wyrażonych, toiest na:

1,

## O Równoległobokach i Trójkątach 97

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.  
czyli króćcy, na 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

Kwadraty podwojone nie mogą się inaczej kończyć, tylko tak, jak się kończą liczby kwadratów ostatnie, podwojone, to jest, na: 2, 8, 8, 2, 0, 0, czyli króćcy na: 2, 8, 0. A że pierwsze zakończenia na, 2, 8, nie są zakończeniami kwadratów; więc kwadraty podwojone, liczb zakończonych na: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, nie mogą być kwadratami. Jeżeli liczba zakończona jest na jedno zero, to jest jeżeli jeden lub więcej dziesiątków w sobie zupełnie zamyka: kwadrat ię zamykać będzie takąż liczbę setów, a zatem kończyć się będzie na dwa zera. Kwadrat zaś liczby kończący się na 5, kończy się na 25. a podwojony, kończyć się będzie na jedno tylko zero, bo będzie kończył się na 50: więc tak podwojony nie będzie kwadratem.

Nakoniec jeżeli liczba kończy się na jedno zero, 10 razy zamykać w sobie będzie liczbę zakończoną na jeden z dziesięciu pierwszych znaków: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9: a kwadrat ię 100 razy zamykać będzie liczbę zakończoną na: 1, 4, 5, 6, 9, kwadrat zaś ten dwa razy wzięty, zamykać będzie 100. razy liczbę zakończoną na: 2, 8, 0, a pierwiastek kwadratu tego dwa razy wziętego, zamykać będzie 10. razy pierwiastek liczby zakończony na jeden z tych trzech znaków: 2, 8, 0;

G

który

który to ostatni pierwiastek wyciągniony byź nie może, iakośmy już okazali. Tego samego rozumowania użyć można gdy liczba kończyć się będzie na dwa, trzy, cztery i t. d. zera.

Więc w szczególności mówiąc, Pierwiastek kwadratowy z liczby 2, wyciągniony byź nie może.

126. To Dowodzenie stosowane byź może do wszystkich liczb na 2. zakończonych. I tak nie można wyciągnąć Pierwiastku kwadratowego z liczb: 12, 22, 32. 42, 52, 62. i t. d. czyli to w liczbach całkowitych, czyli w ułamkach, czyli w liczbach, mieszanych.

127. Podobnie dowieść można, że niepodobna znaleźć pierwiastek kwadratowy liczby 3. ani żadney inney, na 3. kończący się. Tym, co wyżej sposobem dowodzi się niepodobność wyciągnięcia Pierwiastku kwadratowego z liczb kończących się na 5, 7, i t. d. a stąd możnaby ułożyć Tąblicę bardzo obszerną liczb takich, których Pierwiastki kwadratowe w liczbach ani całkowitych, ani łamanych, zupełnie wyciągnięne byź nie mogą.

128. Moznaby jednak i ogólnie dowieść, że wszystkie liczby całkowite, które nie mają Pierwiastku kwadratowe-

go

## O Równoległobokach i Trójkątach 99

go w liczbach całkowitych; mieć go też nie będą i w liczbach łamanych. Kładzie się tu treść tylko tego dowodu:

Jeżeli dwie liczby są *pierwszemi* iedną względem drugiej, (obacz w Arytmetyce na Karcie 192.) ich kwadraty *pierwszemi* też będą iedną względem drugiego; ponieważ dzielniki kwadratów pochodzą z dzielników ich *Pierwiastków*.

I tak, że liczby 2, i 3, są między sobą *pierwszemi*; *pierwszemi* są także między sobą i ich kwadraty: 4, i 9; że liczby 3, i 5, są między sobą *pierwszemi*: podobnie *pierwszemi* będą i ich kwadraty: 9, i 25. Więc jeżeli dwie jakiegokolwiek liczby są *pierwszemi* między sobą, ich kwadraty nie będą wielokrotne iedną drugiego, to jest: iedną kwadrat nie będzie zupełnie w sobie zamykał drugiego.

Niech będzie liczba, jaką całkowitą, której nie można mieć *Pierwiastku* kwadratowego w liczbach całkowitych. Gdyby ten *Pierwiastek* można zupełnie okazać w liczbie mieszanej; ta liczba mieszana, dałaby się obrócić na sam ułomek, a ułomek ten można by przywieść do najprościejszych wyrazów. Ale, aby tenże ułomek wyrażał zupełny *Pierwiastek*; trzeba by, aby jego kwadrat był liczbą całkowitą, a zatem aby licznik tego ułamka kilka razy zupełnie większy był od



dzielnika jego, co jest nie podobną: więc, gdy liczbie iakię całkowitę, nie można zupełnie znaleźć pierwiastku kwadratowego w liczbie całkowitej: nie można go też znaleźć ani w ułamku.

129. Są więc takie niektóre Iłości (*Quantitates*) które w liczbach dokładnie byż wyrażone nie mogą, ani nawet wyrazić można; iak się mają do jedności. Takie są te Iłości, które przez siebie same rozmnożone, czyniłyby: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, i t. d. Te Iłości nazywają się *niespółmiernemi* (*Incommensurabiles*, albo *Irrationales*)<sup>\*</sup> piszą się następującym sposobem.  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}$ . i t. d. Znak ten  $\sqrt{\phantom{x}}$ , czyta się *Pierwiastek* (*Radix*) na przykład:  $\sqrt{2}$ , Pierwiastek dwóch,  $\sqrt{3}$ , Pierwiastek trzech, i t. d.

130. Gdy mówię, że tych Iłości wyrazić dokładnie nie można; przydaię zaraz, że ich dokładnie wyrazić nie można w liczbach; bo w inny sposób można je dokładnie wyrazić. Na przykład: można zawsze naznaczyć dwie linie, któreby się miały między sobą, iak 1, do Pierwiastku kwadratowego liczby podanej. I tak Przekątna kwadratu, ma się do boku jednego, iak się ma Pierwiastek kwadratowy z 2, do 1. albo iak  $\sqrt{2}$ : 1. Wysokość także Trójkąta równobocznego, tak się ma do połowy Podstawy, iak  $\sqrt{3}$ : 1. i t. d.

*O Równoległobokach i Trójkątach 101*

131. Lubo w liczbach nie można dokładnie wyrazić Ilości niespolmiernych; można jednak ich wartość przybliżyć do prawdziwej, i uchybić zmniejszyć tyle, ile zechcemy. Sposób do tego najsadniejszy jest przez użycie znaków *Dziesiątnych* do wyrażenia takich Ilości.

Niech będzie podana liczba 2, aby wyciągnąć z niej Pierwiastek kwadratowy przez przybliżenie (per approximationem.)

Gdyby liczba podana była razy 100, 10000, 1000000, i t. d. większa, ię pierwiastek byłby też większy razy 10, 100, 1000 i t. d. takdalec, że wyciągnąwszy pierwiastek z liczb 200, 20000, 2000000. i t. d. trzebaby pierwiastek ten dzielić przez 10, 100, 1000, i t. d. aby w nim uniknąć omyłki w częściach dziesiątych, setnych, tysięcznych i t. d. Przeto Pierwiastek kwadratowy, wyciągnięty z 2, aż do części tysięcznych, znaydzie się wyciągając go z liczby: 2000000.

Pierwiastek náybliższy z liczby 2000000 wyciągnięty jest: 1414. a pierwiastek z liczby 2, przybliżony aż do  $\frac{1}{1000}$ . jest, 1,414. Ponieważ kwadrat z 1,414. jest 1,999396, i różni się od 2, tylko 0,000604.

Wzór działania.

$$\begin{array}{r}
 2,00,00,00 \mid 1,414 \\
 \hline
 1 \\
 24 \mid 10,0 \\
 \quad 96 \\
 \hline
 281 \mid 40,0 \\
 \quad 281 \\
 \hline
 2824 \mid 1190,0 \\
 \quad 1129,6 \\
 \hline
 \quad \quad 604.
 \end{array}$$

Gdybyśmy chcieli jeszcze bardziej przybliżyć do prawdziwego, ten Pierwiastek, na przykład żeby ani w części  $\frac{1}{10000}$  nie było uchybienia; trzeba by jeszcze dwa zera przydać, aby mieć iednym znakiem więcej w pierwiastku.

132. Dla sprawdzenia, czyliśmy w części  $\frac{1}{1000}$  nie uchybili, można położyć zamiast pierwiastku znalezionego 1,414; liczbę: 1,415, a ta przez siebie rozmnożoną uczyni kwadrat: 2,002225, większy od 2.

133. Częstokroć bardzo wygodnie i prętko wyciągnąć można z liczby pierwiastek przybliżony, w ułamkach zwyczajnych. Sposób ten zasadza się na tem, że jeżeli liczba jest złożona z dwóch części, z których iedna jest bardzo wielką względem drugiej; kwadrat tej liczby

### O Równoległobokach i Trójkątach 103

by będzie prawie złożony z kwadratu części większej, i z podwojonego rozmnożenia części pierwszey przez drugą; ponieważ kwadrat części mniejszey, iako bardzo mały, może bydź zaniedbany. I tak kwadrat liczby naprzykład 11, podzielonéy na dwie części: 10, i 1; będzie równy: 100, toiest kwadratowi z 10, przydawszy 10: przez 2 rozmnożoné, toiest; 20, i kwadrat części mniejszey: 1; a choćby tén ostatni kwadrat i opuścić; tedy iednak summa 120, małoby się różniła od kwadratu prawdziwego 121.

134. Idzie stąd, że mając liczbę, z której przypada wyciągać Pierwiastek złożony z dwóch części, z których iedna byłaby wielką, a drugą małą, ieżeli wiemy iuż tę część wielką, znaydziemy z niewielkiém uchybieniem i część małą, podzieliwszy różnicę między liczbą podaną, i kwadratem części wielkiey, przez tę samę część wielką dwa razy wziętą. To, co na wieloráz wypadnie, trzeba przydadź do wielkiey części, gdy liczba podana będzie większą od kwadratu części wielkiey; albo odjąć od części wielkiey, gdy kwadrat iey większy będzie od liczby podaney.

Niech będzie podana do wyciągnięcia Pierwiastku, liczba 5. Pierwiastek iey náybliższy w liczbie całkowitey, iest 2. któ-



którego kwadrat 4. Różnica między tym kwadratem i 5, jest: 1. Podzielmy tę różnicę 1. przez 2, dwa razy wzięte, to jest przez 4, i będzie  $\frac{1}{4}$ . A zatem Pierwiastek liczby 5. nie wiele uchybiony, będzie 2,  $\frac{1}{4}$  albo  $\frac{9}{4}$ . Kwadrat z  $\frac{9}{4}$  jest  $\frac{81}{16}$ . czyli 5.  $\frac{1}{16}$ . Podzielmy  $\frac{1}{16}$  przez  $\frac{9}{4}$  dwa razy wzięte, to jest przez  $\frac{9}{2}$ , wypadnie na wieloraz  $\frac{1}{72}$ , który odjąwszy od  $\frac{9}{4}$  czyli od 2,  $\frac{1}{4}$  zostanie 2  $\frac{17}{72}$  albo  $\frac{161}{72}$ . i ten będzie jeszcze bardziej przybliżający się do prawdziwego pierwiastek kwadratowy liczby 5. jakoż kwadrat z  $\frac{161}{72}$  jest:  $\frac{25921}{5184}$  czyli 5  $\frac{1}{5184}$ .

135. Chcąc porównać to przybliżenie z tem, któreśmy mieli w ułamkach dziesiętnych; obróćmy ułomek zwyczajny  $\frac{161}{72}$  na ułomek dziesiętny, a znajdziemy: 2,2361. i t. d. Pierwiastek zaś liczby 5, w ułamku dziesiętnym byłby 2,2360. i t. d. A zatem różnica liczb w tem dwoiakiem postępowaniu, wydałyby się dopiero w częściach dziesięć tysięcy.

136. W pierwszym postępowaniu, kładzie się zamiast liczby podanej, ułomek ze wszystkiemi jej równymi, którego dzielnik jest kwadratem z 10, z 100, z 1000.

# O Równoległobokach i Trójkątach 105

z 1000. i t. d. Naprzykład zamiast 2, pisze się  $\frac{200}{100}$ ,  $\frac{20000}{10000}$ ,  $\frac{2000000}{1000000}$ . W drugiem postępowaniu, szukamy ułamka bardzo blisko równego liczbie podanej. Którego tak licznik, iako i mianownik, byłby zupełnym kwadratem. I tak liczba 2, jest prawie równą ułomkóm:  $\frac{49}{25}$ ,  $\frac{100}{49}$ ,  $\frac{289}{144}$  i t. d. Liczba 3, jest prawie równą ułomkóm:  $\frac{49}{16}$ ,  $\frac{361}{121}$  i t. d. Znajdujemy zaś te ułamki, dwójac, trojąc i t. d. kwadraty liczb naturalnych: 2, 3, 4, 5, i t. d. i uważając, jeżeli między liczbami kwadratowemi nie będzie która tuż zbliżająca się do liczby podwoionej, potroionej, i t. d. którąśmy już znaleźli. Naprzykład: 2 razy 4, czyni 8, a blisko czyni kwadrat 9, więc 2, zupełnie równą się  $\frac{9}{4}$ , a nie daleko jest od  $\frac{9}{4}$ , a zatem Pierwiastek z 2, będzie blisko  $\frac{3}{2}$ . Podobnie 2 razy 25, czyni 50, więc 2, równą się  $\frac{50}{25}$ , a nie daleko jest od  $\frac{49}{25}$ , a zatem Pierwiastek z 2, będzie blisko  $\frac{7}{5}$ . Można potem poprawić, gdy zechcemy pierwsze te przybliżenia, postępując sobie tak, iak się wyżej powiedziało.

Dosyć będzie tém czasem na téj początkowey wiadomości względem przybliżania Pierwiastków nie spółmiernych. Rzecz ta stała się materyą wielkiey wagi, gdy sławni Matematycy Euler i de la Grange, głę-

głębiej ią brać poczęli, i rozmaite, ię przytósowania czynić. (m)

137. Niech będzie ułomek  $\frac{1}{3}$ , z którego trzeba wyciągać Pierwiastek kwadratowy. Zamiast cobyśmy mieli osobno ten Pierwiastek wyciągać z 2, i z 3, i dzielić potem Pierwiastek Licznika przez pierwiastek mianownika, wygodnięj będzie ułomek ten  $\frac{2}{3}$ , odmienić na inny, gdzieby mianownik, był zupełnym kwadratem. Ułomek tedy tak odmieniony będzie  $\frac{6}{9}$ . Wyciągniemy pierwiastek z licznika 6, a trzecią część tego Pierwiastku, będzie pierwiastkiem ułamka  $\frac{2}{3}$ .  $\sqrt{6} = 2, 4494$ ; trzecia tego pierwiastku część iest prawie 0, 8165. Jakoż kwadrat z 0, 8165, będzie: 0, 66667225; i nie wiele różni się od  $\frac{2}{3} = 0, 66666666$ . i t. d.

138. Można by też wyciągnąć pierwiastek z  $\frac{2}{3}$ , przez ułamki zwyczajne. Kwadrat nąybliższy ułamka  $\frac{2}{3}$ , iest 1. który różni się od  $\frac{2}{3}$  przez  $\frac{1}{3}$ . Dzielimy, przez kwadrat 1. podwoiony to iest przez 2, tę różni-

---

(m) Obacz między innemi Dzieło pod Tytułem: *Introductio ad analysim Infinitorum* przez Eulera; i przydatki, de la Grange do Algebry po Franczaku wydane.

# **O Równoległobokach i Trójkątach 107**

różnicę  $\frac{1}{3}$ , i będzie  $\frac{1}{6}$ , a odiawszy  $\frac{1}{6}$ , od 1.  
 albo od  $\frac{6}{6}$ , zostanie  $\frac{5}{6}$ . kwadrat z  $\frac{5}{6}$ , jest  $\frac{25}{36}$   
 który od  $\frac{2}{3}$ , różni się przez  $\frac{1}{36}$ . Tę różnicę  
 $\frac{1}{36}$ , podzieloną przez dwa razy  $\frac{5}{6}$ , czyli przez  
 $\frac{5}{3}$ , to jest  $\frac{1}{60}$ , odeymuię od  $\frac{5}{6}$ , zostanie  $\frac{49}{60}$ . J ten  
 ułomek  $\frac{49}{60}$ , będzie pierwiastkiem bardzo  
 bliskim  $z \frac{2}{3}$ , ponieważ kwadrat z  $\frac{49}{60}$  jest.  
 $\frac{2401}{3600}$ , a ułomek:  $\frac{2}{3}$  znaczy tyle co  $\frac{2400}{3600}$ , róż-  
 nica więc będzie tylko w  $\frac{1}{3600}$ .

139. W ogólności mówiąc, aby Pier-  
 wiastek kwadratowy wyciągnąć z ułom-  
 ka iakiego; trzeba pierwey tak zrobić,  
 aby mianownik jego był kwadratem, mno-  
 żąc, gdy inaczey byż nie może, licznika  
 i mianownika przez mianownika, i wy-  
 ciągać potém pierwiastek z licznika tak ro-  
 zmnożonego, a przez mianownika nie  
 rozmnożonego podzielić ten pierwiastek.

140. Może się jednak obeysdż czasem  
 bez mnożenia tak licznika, iako i miano-  
 wnika, przez tegoż samego mianownika;  
 gdy mianownik już jest kwadratem, al-  
 bo gdy takim można go uczynić, mno-  
 żąc przez mnieyszą iaką od mianownika  
 liczbę, tak licznika, iako i mianownika.  
 Naprzykład chcąc wyciągnąć pierwiastek  
 z  $\frac{3}{4}$ ; wyciągniemy go z 3. i podzielimy  
 przez 2; chcąc mieć pierwiastek z  $\frac{5}{12}$ , roz-  
 mnożymy 5. i 12. przez 3, a mając stad

$\frac{15}{36}$



$\frac{15}{36}$ , wyciągniemy pierwiastek z 15, i podzielimy przez 6, pierwiastek z 15, będzie prawie 4, odtrąciwszy  $\frac{1}{8}$ , to jest będzie  $\frac{31}{8}$  więc pierwiastek z  $\frac{5}{12}$  będzie  $\frac{31}{40}$ ; kwadrat albowiem z  $\frac{31}{48}$  jest  $\frac{961}{2304}$ , a  $\frac{5}{12}$  tyle znaczy co  $\frac{960}{2304}$ ; a zatem uchybienie jest tylko w  $\frac{1}{2304}$ .

## R O Z D Z I A Ł VI.

O dodawaniu i odeymowaniu Kwadratów, i zaminianiu ich na iakiękolwiek Figury prostokrésne.

141. *Defin:* W trójkacie prostokątnym, bok przeciwny prostemu kątowi nazywać będziemy, Liniją *Przeciwprostokątną*, albo iednym słowem, *Przeciwprostokątną* (Hypothenusa.)

142. *Twierdz:* 1. Kwadrat zrobiony na przeciwprostokątnej Trójkąta prostokątnego, równa się summie kwadratów z dwóch innych boków tegoż trójkąta.

Prawdę Twierdzenia tego okazać na-przód potrzeba na Trójkacie Prostokątnym; równo ramiennym, to jest mającym dwa boki równe dowodząc: że kwadrat zrobiony na Przekątnej kwadratu dwa razy jest od tegoż kwadratu większy.

Niech

O dodawaniu i odeymow: Kwadr: 109

Niech będzie ABCD, kwadrat; któ. Tab.VIII.  
 régo Przekątna AC. Przeciagniemy AB, Fig. 2.  
 do E, a CB, do F, tak, aby BE, i BF,  
 równé były AB. Poprowadźmy Linie:  
 AF, CE, EF, Czworokąt ACEF, będzie  
 kwadratem przekątnéy AC, i będzie dwa  
 razy-większy od kwadratu ABCD.

Jakoż cztery Trójkąty: ABC, ABF,  
 EBC, EBF, mogą przyśtać do siebie: bo  
 mają wszystkie kąty przy B. proste, i  
 boki przy nich równé: a zatem linie  
 AC, CE, EF, AF, będą wszystkie rów-  
 nne. Każdy oprócz tego kąt w czworo-  
 kącie ACEF, iest prosty bo złożony  
 z dwóch kątów pół prostych: iak na-  
 przykład kąt ACE, złożony iest z ką-  
 tów półprostych BCA, BCE; więc Czworo-  
 kąt ACEF iest prostokątem mającym  
 boki wszystkie równé a przeto iest kwa-  
 dratem. Tén kwadrat ACEF, składa się  
 z czterech Trójkątów, z których każdy  
 przyśtać może do iednego z dwóch Tróy-  
 kątów kwadratu ABCD. Że tedy takich  
 Trójkątów iest cztery w kwadracie  
 ACEF, iakich iest dwa w kwadracie  
 ABCD, kwadrat więc Przekątnéy AC, iest  
 dwa razy większy od kwadratu tego, któ-  
 régo bokiém iest ta Przekątna.

143. Wniosek: Aby dodać dwa  
 kwadraty równé, trzeba zrobić Tróy-  
 kąt prostokątny równoramienny, które-  
 go boki przy kącie prostym byłyby ró-  
 wne, bokowi iednego z dwóch kwadra-  
 tów,

tów, a Przeciwpromienną tego Trójkąta, będzie boki kwadratu równego summie dwóch tamtych kwadratów.

Można jeszcze nim się do ogólnego dowodzenia przytąpi, przytoczyć niektóre przypadki szczególne; gdzie trzy boki Trójkąta prostokątnego będą w liczbach wyrażone. Obacz na Figurze 3. gdzie trzy boki Trójkąta prostokątnego, wyrażone przez liczby: 5, 4, 3. w częściach równych, na przykład w calach, kwadraty tych liczb są, 25, 16, 9. calów kwadratów; i pierwszy kwadrat równy się summie dwóch ostatnich.

# INNE PRZYKŁADY,

Przeciwpromienną Boki.

13,	2	5
17,	15	8
25,	24	7.

Dowodzenie ogólne, które teraz damy, można objaśnić na kwadratach z kartki grubey wyrzniętych.

Niech będą dwa iakiékolwiek kwadraty: ABCD, i AEFG. znajdziemy kwadrat równy ich summie w ten sposób. Postawmy naprzód te kwadraty, jeden przy drugim tak, aby dwa ich boki AD, i AG, były się, i jedną linią czyniły DG, Bok AG

O dodawaniu i odeymow: Kwadr: 111

AG mniejszego kwadratu, przenieśmy potém na bok AD. większego kwadratu od D do J. Poprowadźmy linię IF, IC. Trójkąty prostokątne IGF, CID. mają boki przyległe kątowni prostemu równe bokom kwadratów obudwóch. Trzeba więc dowieść że kwadrat przeciw prostokątnej IF, albo IC, równy jest summie kwadratów z GI, GF, albo z DC, i DI. Wyrzuwamy kartę wzdłuż Linię IF, i IC, przyłożymy, Trójkąta IDC, Bok DC, na jego równym boku BC, bok DI, przypadnie na BH, przedłużeniu boku AB, a to z téj przyczyny, że obadwa są kąty proste D, i B; bok zatém trzeci IC, weźmie położenie HC: będzie więc Trójkąt CBH, równy Trójkątowi GDI. Podobnie i drugiego Trójkąta IGF, bok IG, przyłanie zupełnie do boku HE, sobie równego, ponieważ IG, równa się AD, AD, równa się AB: a AB, równa się HE: bok GF, przypadnie na równy sobie bok EF: a IF, weźmie położenie HF: będzie więc Trójkąt FEH, równy Trójkątowi FGI. Czworokąt, który się zrobi z czterech przeciwprostokątnych: CI, IF, FH, HC, będzie miał wszystkie kąty proste, bo kąt na przykład IFH, równa się summie kątów IFE, i EFH, które równie czynią kąt prosty, iak czynią kąty IFE i IFG. Ten więc czworokąt jest razem i prostokątem mającym wszystkie boki równe; a zatém jest kwadratem: który to kwadrat równa się summie dwóch kwadratów podanych, a

zro-



zrobiony jest na Przekątnej Trójkąta prostokątnego, mającego za boki przyległe kątowi prostemu te same, które były bokami tychże kwadratów.

Dowodzenie następujące powinno tym jaśniej być wyłożone; im prościej jeszcze od pierwszego tę prawdę okazaie, i więcej daie do czynienia dowcipowi. Wiele także użytecznych wniosków z niego wypływa.

Táb. IX.  
Fig. 1.

Niech będzie Trójkąt ABC. prostokątny przy C. Na trzech bokach jego: AB, AC, BC, wystawmy trzy kwadraty: ABDE, ACFG, BCHI. Kwadrat ABDE, równy będzie summie dwóch innych: ACFG i BCHI.

Z wierzchołku kąta prostego spuścimy na przeciwprostokątną AB, prostopadłą CL, i przeciągniemy ją aż do boku ED, do M.

Pokazać teraz trzeba, że kwadrat BCHI równy jest prostokątowi BDML, a kwadrat ACFG, Prostokątowi AEML, a zatem obadwa razem kwadraty równe kwadratowi ABDE.

Pociągniemy linią CD, Trójkąt BDC, będzie połową Równoległoboku prostokątnego BDML; bo obadwa mają wspólną podstawę BD, i na téż samej równo odległej MC, są zakończone. (94.)

Po-

O dodawaniu i odejmow: Kwadra: 113

Pociągniemy linią  $AI$ , Trójkąt  $BIA$ , będzie połową kwadratu  $BCHI$ , dla téż, że, co wyżej, przyczyn: bo obadwa także mają podstawę spólną  $BI$ , i obadwa na iednę równoodległą  $AH$ , są zakończone.

Jeżeli tedy dowiedziemy, że Trójkąty:  $ABI$ ,  $CBD$ , są równe; już tém samym Prostokąt  $BDML$  równy będzie kwadratowi  $BCHI$ ; bo kiedy połowy dwóch rzeczy są równe; to i dwie té rzeczy będą równe.

Té dwa Trójkąty mogą przystać do siebie: ponieważ bok  $AB$ , w jednym, równy jest bokowi  $BD$ , w drugim, bo obadwa té boki do iednego kwadratu należą: bok  $BI$ , w jednym, równy także jest bokowi  $BC$  w drugim: kąty między temi bokami zawarte:  $ABI$ ,  $CBD$ , składają się obadwa z kąta prostego i z kąta  $ABC$ ; więc té dwa Trójkąty są równe w powierzchniach; a zatém i kwadrat  $BCHI$ , równy będzie Prostokątowi  $BDML$ . Tymże samym sposobem dowodzi się, że kwadrat  $ACFG$ , równy jest Prostokątowi  $AEML$ ; to jest, pociągnawszy linie  $CE$ ,  $BG$ , Trójkąty  $BAG$ ,  $EAC$ , mogą przystać do siebie, a zatém będą równe: kwadrat więc  $ACFG$ , że jest dwa razy większy od Trójkąta  $BAG$ , będzie równy Prostokątowi  $AEML$ ,

H  $AEML$  dwa,

dwa razy także, większemu od Trójkąta EAC. (n)

144. *Wniosek.* Gdy od wierzchołka kąta prostego, w Trójkącie prostokątnym spuszczoną będzie Prostopadłą na przeciw prostokątną; kwadrat z boku iednego tego Trójkąta równy będzie Prostopokątowi zrobionemu z przeciwprostokątnej, i z odcinka uczynionego przez Prostopadłą, a przyległego temuż Trójkąta bokowi, którego kwadrat bierze się. Tak na przykład kwadrat boku AC, to jest ACFG, równy jest Prostopokątowi z Przeciwprostokątnej AB, albo AE. i z odcinku AL, to jest, Prostopokątowi AEML; iako się wyżej pokazało. Podobnie i kwadrat drugiego boku BC, to jest BCHI, równy

(n) Sposób postępowania w tém dowodzeniu, może służyć za wzór do innych dowodzeń przydluższych i z wielu złożonych. Podzieliłiśmy go na części, z każdą osobnośmy się obeszli. W tych samych częściach były znowu uczynione, nowe podziały, nie zawisłe iedne od drugich, i każdy podział w szczególności dowodzony. Linie nie były razem prowadzone ale wtedy dopiero, gdy były potrzebne. Ta ostatnia uwaga powinna być między innemi na pamięci w dowodzeniu Twierdzeń złożonych, gdzie gdyby wiele razem linii prowadziło się na Figurze, nie małą trudność zadałoby to Ucznióm, nie dobrze jeszcze w takowe działania wprawionym.

*O dodawaniu i odejmowaniu Kwadr: 115*

równy jest Prostokątowi z Przeciwprostkątnéy AB, albo BD, i z odcinka BL, toiest; Prostokątowi BDML.

145. Zagádn: 1. Mając dané dwa kwadraty, zrobić kwadrat równy ich summie, albo ich różnicy.

1. Zrobmy kąt prosty, którego ramionami byłyby boki dwóch kwadratów danych. Pociągnąwszy przeciwprostkątną, ta będzie bokiém kwadratu równego summie tamtych dwóch kwadratów.

2. Zrobmy kąt prosty, dawszy mu za iedno ramię bok mniejszego kwadratu. Od końca tego ramienia, promieniem równym bokowi większego kwadratu, nakerślny łuk koła, któryby przecinał ramię drugie kąta prostego: to przecięcie naznaczy długość tego drugiego ramienia, z którego wyprowadziwszy kwadrat, ten będzie równy różnicy dwóch kwadratów danych.

Gdyby kwadraty dané były równe; rozwiązanie byłoby jeszcze łatwiejsze.

*Przystósowanie zagádnienia, poprzedzającego, do wynalezienia innych Kwadratów.*

146. Jużesmy pokázali, że kwadrat Przekątnéy jest dwa razy większy od  
H<sub>2</sub> kwa



kwadratu, którego jest ta Przekątna. Aby zrobić kwadrat równy summie trzech kwadratów równych, czyli aby potroić taki kwadrat, znalazłszy naprzód kwadrat podwójny, można by mu przydać znowu kwadrat pojedynczy, ale też można i jeszcze lepiej tak sobie postąpić: Kwadrat potrójny jest różnicą kwadratu poczwornego, od kwadratu pojedynczego. Zróbmyż więc Trójkąt prostokątny, którego bokiemi jednym byłby bok kwadratu danego, a Przeciwpromienną dajemy mu dwa razy większą od tego boku; bok drugi, który przypadnie w tymże Trójkącie będzie taki, jakiego nam potrzeba, abyśmy mieli kwadrat potrójny.

147. Uwaga. Trójkąt Prostokątny, którego Przeciwpromienną jest dwa razy tak wielką, jak jest wielkie ramie jedno kąta prostego, ten mówię, Trójkąt dwa razy jest mniejszy od Trójkąta równobocznego, którego połową podstawy byłoby ramie jedno kąta prostego, a drugie byłoby wysokością jego: a zatem, aby potroić taki kwadrat, dosyć jest na podstawie dwa razy większą od boku tego kwadratu zrobić Trójkąt Równoboczny, a wysokość tego Trójkąta okaże wielkość boku, na którym wystawić mamy kwadrat potrójny.

148. Aby zrobić cztery razy większy kwadrat-

*O dodawaniu i odejmowaniu Kwadratów: 117*

kwadrat od tego, który jest dany; trzeba tylko kwadratu danego bok podwoić.

149. Aby zrobić kwadrat pięć razy większy od podanego; trzeba przy kącie prostym postawić dwa ramiona: jedno równe bokowi kwadratu danego, drugie dwa razy tak wielkie, a przeciwprostokątną będzie boki kwadratu pięć razy większego.

150. Aby zrobić kwadrat sześć razy większy od podanego; trzeba albo dodać do siebie kwadrat poczwórny i podwójny; albo też kwadrat podwójny potroić poprowadziwszy w danym kwadracie Przekątną, i tę podwoioną, wzięwszy za bok Trójkąta równobocznego, którego wysokość oznaczy bok kwadratu sześć razy większego.

151. Aby zrobić kwadrat siedm razy większy od danego: trzeba dodać kwadrat poczwórny i potrójny, dawszy kąty proste między bokami tych dwóch kwadratów a na przeciwprostokątnej kwadrat postawiwszy; ten będzie siedm razy większy od danego.

152. Aby zrobić kwadrat ośm razy większy od podanego; trzeba go albo podwoić, i podwojony cztery razy pomnożyć, dawszy mu bok dwa razy większy od boku kwadratu podwoionego; al-

albo też zrobić kwadrat równy Różnicy między kwadratem danym, i kwadratem dziewięć razy większym od niego; postawiwszy na ten koniec Trójkąt prostokątny któremu za ramię jedno przy kącie prostym damy bok kwadratu podanego, a za przeciwprostokątną, linią trzy razy od tego boku większą. Ramię drugie, które przypadnie w tym Trójkącie, oznaczy bok kwadratu ośm razy większego od danego.

153. Aby zrobić kwadrat dziewięć razy większy od podanego; trzeba mu dać bok, trzy razy od podanego większy.

154. Aby zrobić kwadrat dziesięć razy większy od podanego; trzeba wziąć sumę kwadratów, podanego, i dziewięć razy większego.

155. Aby zrobić kwadrat jedenaście razy większy od podanego; trzeba wziąć sumę kwadratów, dwa razy, i dziewięć razy tak wielkiego, jak jest podany.

156. Aby zrobić kwadrat dwanaście razy większy od podanego: trzeba podwoić bok kwadratu potrójnego, i na tym boku potrójnym kwadrat postawić.

157. Aby zrobić kwadrat trzynastcie  
razy

*O dodawaniu i odejmowaniu: Kwadra: 119*

razy większy od podanego; trzeba wziąć sumnię kwadratu poczwornego, i dziewięć razy większego, niż jest kwadrat podany: albo też postawić Trójkąt prostokątny i dadź dwa ramiona: jedno trzy razy, a drugie dwa razy większe od boku kwadratu podanego; przeciwprostokątną oznaczy bok kwadratu trzynastcie razy większego i t. d.

158. Wniosek z zagadnienia poprzedzającego, że kwadrat ramienia iednego przy kącie prostym, równy jest Prostokątowi i z odcinka iey przyległego temuż ramionowi, przez prostopadłą zrobionego, ten mówię wniosek daie sposób ogólniejszy, a czasem i prostszy rozwiązania zagadnień w przytósowaniu położonych.

Jakoż jeżeli przeciw prostokątną jest dwa, trzy, cztery i t. d. razy tak wielką, iak odcinek przyległy iednému bokowi: prostokąt z tēy przeciw prostokątnej i z tego odcinka, będzie też dwa, trzy, cztery i t. d. razy tak wielki, iak kwadrat tego samego odcinka; a zatém i kwadrat boku przyległego temu odcinkowi będzie też dwa, trzy, cztery i t. d. razy, tak wielki, iak kwadrat tego odcinka: co iasno bydź powinno, mając w pamięci to, co się powiedziało w Arytmetyce na karcie 88, i następujących o mierzeniu Prostokątów; a co tu nie zawadzi powtórzyć.



159. Podanie przybrane (Lemma). (o) Gdy od punktu któregokolwiek na okręgu koła, poprowadzone będą dwie linie do dwóch końców średnicy; kąt przy tym punkcie zrobiony, i zawarty między dwiema temi liniami będzie prosty.

Táb. IX. Niech będzie AKB, półkoło, którego  
Fig. 2. AB, jest średnią. Weźmy iakikolwiek punkt, na przykład K, na okręgu tego półkoła, i poprowadźmy od tego punktu linie AK, BK, do końców średnicy. Kąt zrobiony przez te dwie linie jest prosty.

Przygotowanie. Pociągniemy promień CK.

Dowódz. Trójkąt AKC, jest równoramienny, bo AC; równa się CK; więc i kąty A, i CKA, na przeciw tym bokom stojące będą równe; toż mówić, i o Trójkącie CKB; a zatem w Trójkącie AKB, kąt przy K, będzie równy summie kątów A i B; a ponieważ razem z temi dwoma kątami, czyni dwa kąty proste; więc sam przez się będzie czynił kąt jeden prosty.

160.

(o) Lemma nazywamy podaniem przybranem, że nie należy właściwie do tej rzeczy, o której mowa, i że się przybiera czasem z inną częścią Matematyki dla przysposobienia nas do łatwiejszego zrozumienia tego, co następuje.

O dodawaniu i odejmowa: Kwadr: 121

160. Zagadn: 2. Znaleźć kwadrat, któryby kilka ciał razy, lub więcej zamykał w sobie kwadrat dany.

Niech AC, zamyka tyle razy w sobie AB, ile razy kwadrat, którego szukamy, má w sobie zamykać ten który jest dany. Na AC, iako na średnicy nakreślimy półkole. Od punktu B. wyprowadźmy prostopadłą BD, przecinającą półkole w Punkcie K. Linia AK, będzie służyła za bok kwadratowi żadanému.

Táb. IX.  
Fig. 3.

161. Uwaga. Trzeba tu pokazać widocznie Ucznióm pożyteczność większą, i ogólniejszą Geometrii, niżeli Arytmetyki ponieważ w Arytmetyce nie można zupełnie wyciągnąć Piérwiastku kwadratowego z liczb całych które są podwójne, potrójne, poszofne i t. d. innych liczb kwadratowych. J tak nie można, nawet w ułamkach, znaleźć Piérwiastku kwadratowego liczb 2, 3, 5, 6, i t. d.; a w Geometrii, iako się pokazało, znajdujemy i wyznaczamy boki kwadratów podwójnych, potrójnych, poszofnych i t. d.

Można więc powiedzieć; że niepodobność w wyznaczeniu piérwszych ilości, których kwadraty byłyby podwójne, potrójne, i t. d. innych kwadratów, nie jest w sobie, ale pochodzi tylko od sposobu, którego używamy.

162. *Zagadn.* 3. Mając dany Prostokąt, zamienić go na kwadrat iemu równy.

*Rozwiąz:* Na większy bok prostokąta, przenieśmy długość boku iego mniejszego, tak, aby koniec ieden tego boku mniejszego schodził się z końcem iednym boku większego. Na tymże boku większym, iako na średnicy nakerślimy półkołę a do końca drugiego boku mniejszego nie schodzącego się z końcem drugim boku większego wyprowadźmy Prostopadłą, i od punktu przecięcia téżże Prostopadłej z półkołem, poprowadźmy linią do tego końca średnicy, który schodzi się z bokiem mniejszym Prostokąta. Ta ostatnia linią będzie bokiem kwadratu równego Prostokątowi.

164. *Wniosek.* Widzieliśmy w Rozdziale V. iako Figurę każdą prostokreślną można zamienić na Prostokąt. Teraz się pokazało, iak można Prostokąt każdy zamienić na kwadrat: więc każda Figura Prostokreślna, może być i na kwadrat zamenioną.

W Trójkacie mającym kąt ieden rozwarty, kwadrat boku przeciwnego temu kątowi, większy jest od summy kwadratów dwóch innych boków: mniejszy zaś byłby kwadrat boku przeciwnego kątowi ostrému od summy kwadratów dwóch innych boków w jednymże Trójkacie. Dwa

O dodawaniu i odeymow: Kwadra: 123

Dwa następujące Twierdzenia, poká-  
żą różnicę w Tróykacie między kwadra-  
tem boku tak przeciwnego kątowi roz-  
twartemu, iako i przeciwnego kątowi  
ostrému, i kwadratowi dwóch innych  
boków.

165. *Twierdz: 2.* W Tróykacie mają-  
cym kąt roztwarty, spuściwszy prostopadłą od iednego końca boku przeciwné-  
go kątowi roztwartemu, na inny bok  
którykolwiek; kwadrat tamtego boku,  
będzie równy summie kwadratów dwóch  
innych boków, i dwa razy wziętemu  
Prostokątowi z boku, na który prostopadła spuszczonea, rozmnożonego przez  
odległość od téżże Prostopadłej, wierz-  
chołka kąta roztwartego.

Niech będzie Tróykąt: ABC, który Táb. IX.  
má kąt roztwarty przy C, od końca A, Fig. 4.  
boku AB, przeciwnego temu kątowi:  
spuścmy na BC, prostopadłą AD. Kwa-  
drat z AB, równy będzie summie kwa-  
dratów z AC, i z BC, i dwa razy wzię-  
temu Prostokątowi z BC, przez CD.

*Przygotowanie.* Na linii BD, zróbmy  
kwadrat BDEF, i na dwóch bokach ie-  
go weźmy FG, i FL, równe BC; po-  
prowadźmy przez G, i L, linie GI,  
i LC.

*Dowodz:* Prostokąt FGKL, jest kwa-  
dratem z BC: Prostokąt CDIK, jest kwa-  
dra-



dratém z CD; a Prostokąty obadwa BCKG, i EIKL, są z BC, przez CD.

Kwadrat z AB, równa się summie kwadratów z AD, i z BD, to jest summie kwadratów z AD, z DC, i z BC, i dwa razy wziętemu Prostokątowi z BC, przez CD. A że summa kwadratów z AD, i DC, równa jest kwadratowi z AC, więc kwadrat z AB, równy jest summie kwadratów z AC, i z BC, i dwa razy wziętemu Prostokątowi z BC, przez CD.

156. *Przykład.* Niechby Trójkąt ACD był połową, Trójkąta równobocznego; to jest, niechby linią AC była połową linii CD. Prostokąt z BC, przez CD, dwa razy wzięty, byłby równy Prostokątowi BC, przez CA; a sam przez się byłby tylko jego połową. Tén przypadek szczególny można wyrazić w słowach następujących: *W Trójkącie, którego kąt rozwarty równa się summie kąta prostego i trzeciej części jego; kwadrat boku przeciwnego. kątowi rozwartemu, równy jest summie kwadratów innych dwóch boków, i Prostokątowi z tychże boków.*

157. *Twierdź: 3.* W Trójkącie jakimkolwiek uważając jeden kąt ostry, a od końca boku przeciwnego temu kątowi spuściwszy prostopadłą na jedno ramie jego.

*O dodawaniu i odejmowaniu: Kwadra: 125*

iego; kwadrat tego boku równać się będzie różnicy między summa kwadratów ramion obidwoch kąta tego ostrego, i dwa razy wziętym Prostokątem z ramienia, na które prostopadła jest spuszczo-  
na, i z ostrości wierzchołka kąta ostre-  
go od prostopadley.

Niech będzie Trójkąt ABC, w któ-  
rym kąt C jest ostry. Od końca A, bo-  
ku przeciwnego AB, spuścmy Prostopa-  
dła AD, na ramię BC, kąta ostrego.  
Kwadrat z AB, równy będzie różnicy  
między summa kwadratów z AC, i z CB,  
i dwa razy wziętym Prostokątem, któ-  
rego bokami będą BC, i CD.

Tab. 12.  
Fig. 5.

*Przygotowanie.* Zróbmy kwadrat z CB,  
BCEF. Naznaczmy linie FG, FL, równe  
DB, i CI równą CD. Poprowadźmy ie-  
szcze linie: DL, IG. Przeciagniemy DL,  
i CE do M i N, tak, aby LM, EN ró-  
wne były CD. Złączmy ich końce linią  
MN. Prostokąt ELMN, równy będzie  
kwadratowi z CD.

*Dowódz:* Kwadrat z AB równy jest  
summie kwadratów z AD, i z BD. Kwa-  
drat z BD, to jest FGKL, równy jest  
kwadratowi BCEF, z BC, mniej summa  
dwóch prostokątów: BGIC, i EIKL; al-  
bo dodawszy, i odjawszy kwadrat ELMN,  
z CD; kwadrat z BD będzie równy sum-  
mie kwadratów: BCEF, i ELMN, mniej  
sum-

summą Prostokątów BGIC, EIKL, i kwadratu ELMN, czyli mniey summa Prostokątów BGIC, i IKMN; które obadwa są Prostokątami z boków BC, i CD; a zatem kwadrat z AB, jest równy summie kwadratów z AD, z CD, i z BC, mniey dwa razy wziętym Prostokątem z BC, przez CD. A że summa kwadratów z AD, i z CD, równa się kwadratowi z AC; więc kwadrat z AB, równy jest summie kwadratów z AC, i z BC, mniey dwa razy wziętym Prostokątem z BC, przez CD.

158. *Przykład.* Niechby Trójkąt ACD, był połową Trójkątą równobocznego, a zatem AC, dwa razy większą od CD; w takim razie kwadrat z AB, będzie równy summie kwadratów z AC, i z BC, mniey Prostokątem z tychże boków AC, i BC. Co tak można wyrazić: W Trójkącie, którego kąt ieden równa się kątowi prostemu, mniey trzecią tego częścią, kwadrat boku przeciwnego temu kątowi równa się będzie różnicy między summą kwadratów z ramion tegoż kąta, i Prostokątem z tychże ramion.

159. *Wnioski i Przystosowania dwóch Twierdzeń ostatnich.*

I. Jeżeli w Trójkącie kwadrat iednego boku równy jest summie kwadratów z ramion kąta przeciwnego, albo więk-

O d

szy  
też  
twadwa  
wie  
du  
spes  
ka k  
dwa  
różn  
dwó  
ciw  
dzie  
mnie  
gdy  
ten  
będz  
mnie  
zate  
boki  
bach  
dzie  
wy  
kąta  
dł.  
rów  
bok  
tem  
wys  
chni

boki

*O dodawaniu i odejmowaniu Kwadratów: 127*

szy lub mniejszy od téj summy; kąt też przeciwny będzie prosty, albo roztwarty, lub ostry.

2. W każdym Trójkącie, Prostokąt dwa razy wzięty, z boku któregokolwiek i z odległości wierzchołka kąta jednego przy tym boku, od prostopadłej spuszczonej na tenże bok, z wierzchołka kąta temu przeciwnego, ten, mówię, dwa razy wzięty Prostokąt, równy jest różnicy między summą kwadratów z dwóch ramion, i kwadratem boku przeciwnego temu kątowi, to jest, równy będzie summie tych dwóch kwadratów, mniej kwadratem boku przeciwnego, gdy kąt jest ostry; a gdy roztwarty, to ten Prostokąt dwa razy wzięty, równy będzie kwadratowi boku przeciwnego, mniej summą kwadratów z ramion: a zatem jeżeli wiadome nam są w liczbach boki Trójkątu; dojdziemy stąd w liczbach i prostokąta tego podwójnego: dojdziemy i odcinka (*Segmentum*) podstawy, zawartego między wierzchołkiem kąta, o którym jest rzecz, i prostopadłą. A że kwadrat wysokości Trójkąta, równa się różnicy między kwadratem boku przyległego odcinkowi, i kwadratem tegoż odcinka; więc dojdziemy i wysokości Trójkąta, a zatem i powierzchni jego.

170. *Przykład.* i. Niech będą trzy boki: BC, AB, AC, w liczbach oznaczone:



né: pierwszy 21, drugi 20, trzeci 13.

Kwadrat z AB, iest 400.

Summa Kwadratów z BC, i AC, iest summa z 441. i z 169. toiest 610.

Ta summa ponieważ iest większą, niż kwadrat z AB, przeto kąt przy C. iest ostry.

Różnica między tą summą i kwadratem z AB, iest: 210, która to różnica równa się podwójnému Prostokątowi z BC, przez CD, czyli liczbie znaczący długość boku BC, rozmnożonéy przez liczbę oznaczającą długość odcinka CD, dwa razy wziętą. Tén Prostokąt pojedynczy wyrazi się więc przez 105. A że BC oznaczone iest przez 21, więc długość CD, będzie 5. Kwadrat z AD równa się różnicy między kwadratem z AC, i kwadratem z CD, toiest, różnicy między 169. i 251. Ta różnica iest: 144, więc AD, będzie oznaczone przez 12, Powierzchnia Trójkąta CAB, iest połową Prostokątu z BC, przez AD, toiest, 126.

171. *Przykład 2.* Niech będzie BC 11, AB 20, AC, 13. Kwadrat z AB, będzie 400.

Summa kwadratów z BC, i z AC, będzie summa z 121. i 169. toiest: 290.

Ta

### O dodawaniu i odejmowaniu Kwadr: 129

Ta summa ponieważ jest mniejszą od kwadratu z AB; przeto ką przy C, będzie roztwarty.

Różnica między tym kwadratem, i tą summą jest, 110: która to różnica równa się podwójnemu Prostokątowi z BC, przez CD, a zatem Pojedynczy Prostokąt będzie=55. A że BC, równa się 11; więc CD, będzie się równać: 5.

Kwadrat z AD, równa się różnicy między kwadratem z AC, i kwadratem z CD; to jest różnicy między 169 i 25. Ta różnica jest: 144. więc AD będzie=12; a powierzchnia Trójkąta będzie 6. razy 11. to jest 66. Trzeba na więcej jeszcze przykładach wprawiać uczniów, dobierając po większej części liczb takich, aby Pierwiastki kwadratowe zupełnie w liczbach całkowitych wychodziły.

Przykłady:      Boki      Podstaw

51 i 25	52, albo 28
52 i 29	69, albo 27
17 i 39	44, albo 38
68 i 87	95, albo 31.

172. Przestroga 1. Dla większej wygody używać na potem będziemy skróconych wyrażeń, których tu znaczenie wyklądały.

I

Znak

Znak tén:  $=$  wyrażać będzie równość między dwóma ilościami.

Znak:  $+$  gdzie jedna linią prosto drugą przecina, wyrażać będzie dodanie iednėy ilości do drugiey; i wymawia się tēm słowēm: *więcey* (plus). Naprzykład,  $4+5=9$ , wymawia się, cztery więcey pięcią, równą się dziewięcióm.

Znak:  $-$  wyrażać będzie odeymowanie iednėy ilości od drugiey; i wymawia się tēm słowēm: *mniey*, (minus). Naprzykład:  $7-4=3$ , wymawia się, siedm mniey czterema, równą się trzém.

Dla oznaczenia rozmnożenia liczb, w Arytmetyce, albo Prostokąta z dwóch linii w Geometyi, używać będziemy znaku:  $\times$  toiest krzyża ukośnego. Naprzykład  $4 \times 3$ , znaczy cztery przez trzy rozmnożone,  $AB \times CD$ , znaczy Prostokąt z linii AB i CD: albo Prostokąt z AB, przez CD. Dzielenie oznaczają się tym znakiem, toiest, dwiema kropkami, iedną pod drugą, które kładą się po ilości podzielney, a przed ilością dzielącą. Naprzykład  $6:2$ , znaczy 6, przez 2, podzielone. Można także dzielenie i sposobem ułomków wyrażać, kładąc za licznika ilość podzielną, a za mianowniką, ilość dzielącą kwadrat iakięy ilości, naprzykład linii AB, iednym z tych dwóch sposobem zwykły się wyrażać  $AB^2$ , albo  $AB^a$ , częścicy iednak pierwszym. I

**O dodawaniu i odejmowaniu Kwadr: 131**

I tak pierwsze Twierdzenie można było w ten sposób wyrazić:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

Táb. IX.

Fig. 1.

Szósté  $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \times CD$

Fig. 4.

Siódmé  $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \times CD$

Fig. 5.

Wszystkie trzy tych Twierdzeń przypádki, takby razem mogły być wyrażone:  $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \times CD$ . W tym razie, gdzie kąt jest prosty, linią CD, a zatem i prostokąt  $BC \times CD$ , niknie.

173. Przestroga 2. Trzeba ostrzedz Uczniów, aby używając tych skróconych wyrazów, mieli zawsze przed oczyma Figury stósujące się do tychże wyrazów, i dobrze je różwázali. Należy także ustnie pierwéy wyrazić każde Twierdzenie lub Zagádnienie, nim się przystąpi do pisania ich znakami wyraz skracającými. I owszém lepiejby było, aby poty tych znaków nie używać, póki zupełnéy wprawy nie nabiorą Uczniowie w wyłożeniu ustném a iasném Twierdzeń i Zagádnień im podanych.



## R O Z D Z I A Ł VII.

*O Liniiach stycznych z kołem ;  
o kątach przy okręgu koła ; i o  
kątach , których wierzchołki są  
między okręgiem , albo za  
okręgiem.*

174. *Definicye.* Koła równe są té , któ-  
rych promienie są równe i takie  
koła przystać mogą do siebie.

Gdyby to podanie nie zdawało się być  
tak oczywistém , aby go przypuścić mo-  
żną , za Definicją ; tedy można by do-  
wieść ié tymże samym sposobem , któ-  
rym wyłożyliśmy w Rozdziele I. two-  
rzenie się koła ; (8) pokazując , iż dwie  
linie równe , obrotém swoim około ie-  
dnego i nie poruszonego końca , nie mogą  
zrobić , tylko równe dwa koła : albo też  
uważając té dwie linie , iak gdyby iedna  
leżała na drugiej ; i iak gdyby obiedwie ra-  
zém czyniły tén obrot ; w takim razie ,  
iakiékolwiek będzie położenie wspólne  
tych dwóch linij , ponieważ zawsze ie-  
dna do drugiej przystaie , więc i té miej-  
sca , które przeysdź mają w tymże samym  
czasie , i té , które już przeszły w cza-  
sach równych , rachując od początku ich  
obrotu , przystałyby do siebie : a zatem i

całe

*O Liniach stycznych z kołem; 133*

całe te miejsca, czyli koła, któreby zrobiły, mogłyby też do siebie przystać.

Końce tych dwóch linii tak się obracających, w czasach równych, zrobiłyby łuki równe, a zatem w kołach równych, kąty przy ich środkach równe, zamykają swemi ramionami łuki równe.

Wzajemnie, gdy w równych kołach, równe łuki weźmiemy, kąty w środkach tych kół, które między ramionami swemi zamykają te łuki, będą równe.

Niech będą dwa łuki równe: BA, ba, w dwóch równych kołach. Kąty: ACB, acb, które wierzchołki swoje mają w środkach tych kół, i które zamykają swemi ramionami te łuki, są też równe. Bo gdyby kąty ACB, acb, nie były równe, kąta przykład ACB, gdyby był mniejszy od kąta acb; to kąt inny, na przykład DCB, byłby równy kątowi acb: a zatem i łuki DB ab, byłyby równe; ale, że wzięliśmy za równe łuki AB i ab; więc łuki także AB i DB, byłyby równe, co jest nie podobną, chyba żeby linie CD, i CA iednę tylko linią czyniły, zupełnie do siebie przystając.

Táb. X.  
Fig. 2.

Część koła zawartą między dwóma promieniami i łukiem, zwać będziemy wycinkiem koła, (Sektor Circuli.)

Z tego,

Z tego, co się wyżej powiedziało, wnieść można, że w równych kołach i wycinki te przytkać mogą do siebie, których kąty albo łuki są równe; a wzajemnie, że kąty i łuki są równe w tych wycinkach, które przytkać do siebie mogą.

W kołach równych, łuki równe mają też i cięciwy równe. Jakoż w takich dwóch kołach trójkąty równoramienne, złożone z cięciwy i z dwóch promieni, mogą przytkać do siebie, dla równości promieni, i kątów w środku, które na równych łukach wspieraia się.

Wzajemnie, jeżeli w kołach równych cięciwy są równe; łuki też równe będą: bo Trójkąty złożone z tych cięciw, i z promieni równych, mając trzy boki równe, mogą przytkać do siebie, i kąty w środku, zrobione przez dwa promienie będą równe, a zatem i łuki im przeciwné, równe będą.

Przez odcinek koła (segmentum Circuli) rozumieć będziemy miejsce zawarte między łukiem i cięciwą.

Gdy cięciwa nie jest razem średnicą, dzieli koło na dwa odcinki: jeden większy, a drugi mniejszy od półkoła. Takie dwa odcinki nazywają się odcinkami *przecieżnymi* (Alterna.)

W dwóch

### *O Liniach stycznych z kołem; 135*

W dwóch równych kołach, jeżeli dwa odcinki mają równe łuki, przystać do siebie mogą. Jakoż te odcinki są różnicami dwóch wycinków mających równe łuki, od dwóch Trójkątów, które za podstawy mają cięciwy tychże łuków równych.

Alże te wycinki mogą przystać do siebie, bo mają łuki równe; Trójkąty mogą też do siebie przystać, bo mają wszystkie trzy boki równe.

Więc i dwa odcinki, przystać mogą do siebie będąc różnicą dwóch Trójkątów równych, od dwóch wycinków równych.

Wszystko to, co się teraz powiedziało, trzeba przystosować do łuków, cięciw, wycinków, odcinków jednego koła.

Te podania powinnyby się wydawać oczywistemi, i nie-potrzebować wcale żadnego dowodzenia, i z téj przyczyny są bardzo zdadne, aby się na nich wprawiali Uczniowie w tłumaczenie się iak nąydokładniejszy z tych nawet wyobrażeń, które im już wystawiają rzecz iaką dosyć iasnie; i aby tym sposobem wyobrażenia w sobie proste, prościejszemi ieszcze czynić uczyli się.



175. *Twierdź:* 1. Prostopadła ciągnięta od środka cięciwy, przechodzi przez środek koła.

2. Linia prosta prowadzona od środka koła do środka cięciwy, jest do niej prostopadłą.

3. Prostopadła od środka koła spuszczone na cięciwę, przypada na jej środek.

Táb. X. Niech będzie AB, cięciwa w kole,  
Fig. 2. którego środek C, a promień CA.

1. Prostopadła od środka D, cięciwy wystawiona, przechodzi przez środek koła.

*Dowódz:* W tej prostopadłej wszystkie punkta jednakowo są odległe od dwóch końców cięciwy: a że i środek koła jednakowo jest odległy od dwóch końców tejże cięciwy: więc będzie też znajdował się na tej prostopadłej.

2. Linia CD, od środka koła poprowadzona do środka cięciwy, jest do niej prostopadłą.

*Dowódz:* Trójkąty: DCA, DCB, mają wszystkie boki równe; więc mogą przystać do siebie, a w szczególności kąty przy D, są równe, a będąc kątami przyległymi, obadwa proste być muszą; a zatem linia CD, jest prostopadła do AB.

### O Liniach stycznych z kołem 137

3. Prostopadła  $CD$ , spuszczonej od środka koła na cięciwę  $AB$ , przypada na jej środek.

*Dowód:* W Trójkącie Równoramiennym  $ACB$ , kąty  $A$  i  $B$  są równe; więc w Trójkątach prostokątnych:  $ACD$ ,  $BCD$ , wszystkie kąty równe będą iedne względem drugich: a że i boki  $AC$ ,  $CB$ , są równe; więc te dwa Trójkąty przystać do siebie mogą, a w szczególności linie  $AD$ , i  $BD$ , są równe.

176. *Wniosék.* Koło nie może mieć więcej, iak dwa punkta wspólne z linią prostą; bo gdyby mogło mieć więcej takich wspólnych punktów, naprzykład trzy; złączywszy iedną linią punkt pierwszy z drugim, a drugą punkt drugi z trzecim, i od środka koła poprowadziwszy do tych dwóch linii dwie prostopadłe, te uczyniłyby Trójkąt mający dwa kąty proste, co jest nie podobna.

177. *Zagád:* 1. Mając dane trzy punkta, których położenie nie jest w linii prostej, nakreślić koło, któreby przez te trzy punkta przechodziło.

*Rozwiąz:* Ponieważ środek koła powinien się znajdować na każdej prostopadłej poprowadzonej od środka linii łączącej dwa punkta, znajdujące się  
w ko-

w kole, jeżeli tedy pierwszy z punktów danych złączymy linią z drugim, a drugi z trzecim, i od środka tych dwóch linii poprowadzimy Prostopadłe; te przeczną się w punkcie, który będzie środkiem koła mającego przechodzić przez trzy punkta dane.

178. *Przystósowanie.* Znaleźć środek koła danego.

*Rozwiąz.* Na okręgu koła, weźmy trzy jakiekolwiek Punkta, a przez poprzedzające zagadnienie szukamy środka koła przez te trzy punkta przechodzącego.

179. *Wniosek.* Ponieważ prostopadłe wystawione na środku dwóch linii łączących punkt jeden dany z dwoma innemi, nie mogą się przecinać tylko w jednym punkcie; więc nie może być więcej iak jedno koło przechodzące przez te trzy punkta: albo jeżeli dwa koła przechodziłyby przez te trzy punkta, toby nie były tylko jednym w rzeczy samej kołem: a zatem gdy dwa koła się przecinają, nie więcej mogą mieć iak dwa punkta wspólne w przecięciach. Ta własność koła, że ię z trzech punktów danych wyznaczyć można, iako i ta druga, że wszystkie iego promienie są równe; różni koło od wszystkich krzywych linii, podobnie iako linią prostą różni się przeto od krzywych linii, że dosyć  
jest

III.  
ów  
ru-  
ch  
té  
ad-  
zy  
  
o-  
  
ny  
o-  
d-  
o-  
  
té  
a-  
e-  
e-  
e-  
ez  
ta  
y  
y  
e-  
a  
a-  
a-  
i-  
ni  
ć

O Liniach stycznych z kołem; 139

jest mieć dwa punkta dane, aby ją wyznaczyć.

180. *Twierdź:* 2. Od końca promienia koła wyprowadziwszy Prostopadłą do tegoż promienia; wszystkie inne punkta téj prostopadłej będą za kołem.

*Dowód:* Odległością, którekolwiek z tych inszych punktów, od środka koła, jest przeciwprostokątną Trójkątą, którego bokiem iednym jest promień koła: a że przeciwprostokątną większą jest od iednego z boków Trójkątą; więc i odległość od środka koła, punktu którekolwiek na prostopadłej, oprócz tego, który jest końcem promienia; większą jest od tegoż promienia: a zatem każdy z tych punktów będzie za kołem.

181. *Defin:* Gdy prosta linia ieden tylko má punkt spólny z okręgiem koła; taką linią nazywá się styczną z kołem (*Tangens Circuli.*)

182. *Zagádn:* 2. Maiąc dany punkt na okręgu koła, poprowadzić przez niego styczną.

*Rozwiąz:* Punkt dany ze środkiem koła złączmy promieniem: i od tegoż punktu wyprowadźmy prostopadłą do promienia: a ta sama będzie i styczną z kołem w punkcie danym. 183.



183. *Zagadn.* 3. Od punktu danego za kołem, poprowadzić do tegoż koła, styczną.

*Rozwiąz.* Złączmy linią, punkt dany ze środkiem koła. Na tejże linii, iako na średnicy, nakreślimy półkoło; punktem, gdzie okrąg półkoła przecinać będzie koło dane, będzie tym samym punkt ten, do którego poprowadzoną linią od punktu danego, będzie styczną z kołem (159.)

To zagadnienie dwoiako może być rozwiązane: gdyż półkoło z jednéj lub z drugiey strony średnicy nakreślić można.

184. *Twierdz.* 3. Od końca promienia poprowadziwszy styczną z kołem, jeżeli przez punkt, w którym się ta styczna koła dotyka, przeciągniemy inną jaką linią prostą, ta przecinać będzie okrąg koła.

*Dowodz.* Promień koła jest prostopadły do stycznej w końcu tegoż promienia, a zatem pochyły będzie do każdej innej linii, przez ten koniec promienia, to jest punkt koła przychodzący. Poprowadziwszy więc prostopadłą od środka koła do tej linii, ta prostopadła krótsza będzie od promienia: bo promień będzie przeciwprostokątną tego Trójkąta, którego

## O Linjach stycznych z kołem. 141

régo ta prostopadła będzie tylko bokiém: a że koniec promienia jest na okręgu koła; więc koniec téj prostopadłej nie dojdzie do okręgu koła. Już tedy ieden punkt téj linii będzie w kole, a drugi w samym okręgu koła; na końcu promienia: a zatem linią ta przechodzącą przez koniec promienia, ponieważ drugi swój punkt má w kole, przecinać go musi.

185. *Twierdź: 4.* Jeżeli linią prosta jest styczna z kołem, będzie:

1. Promień poprowadzony od punktu tego, gdzie się linią styka z kołem będzie do téj stycznej prostopadłym.

Jakoż, gdyby promień do punktu tego poprowadzony, nie był do stycznej prostopadłym, tedy linią inszą prostopadłą do tego promienia, i przechodzącą przez jego koniec, byłaby styczna z kołem, a ta pierwszą zamiast stykania się z kołem, przecinałaby go: iako się w poprzedzającym twierdzeniu okazało.

2. Prostopadła do stycznej, od punktu dotknięcia ciągnioną, przechodzi przez środek koła.

Gdyby ta prostopadła nie przechodziła przez środek koła; tedyby jednak promień do tegoż punktu dotknięcia ciągnio-

gniony był prostopadłym do styczney, a zatem od iednego punktu, to jest od punktu dotknięcia, możnaby dwie prostopadłe prowadzić, co jest niepodobną.

186. Uwaga. Pokázaliśmy (59) własność kąta, którego wierzchołek iest na okręgu koła, a którego dwa ramiona wspierają się na końcach średnicy tegoż koła: to podanie było tylko przypadkiem szczególnym podania daleko ogólniejszego, w którym się dowodzi, że wszystkie te kąty są równe, które wierzchołek mają na okręgu koła, a ramionami wspierają się na końcach równych łuków tegoż koła.

187. Twierdzenie 5. Kąt mający swój wierzchołek na okręgu koła, a którego ramiona są cięciwami tegoż koła, iest połową innego kąta, który má wierzchołek w samym koła środku, a ramionami swemi obejmuie tenże sam łuk, co i kąt pierwszy.

Tab. X. Niech będą kąty ACB, ADB, z których  
Fig. 3. pierwszy má wierzchołek w środku C koła, a drugi na okręgu tegoż koła w punkcie D: i niech obadwa te kąty obejmują ramionami swemi tenże sam łuk AB. W takim razie kąt ACB dwa razy iest większy od kąta ADB.

Przypadek 1. Gdy iedno ramie AD kąta

O L  
kąta A

Do  
ramień  
wne,  
od ied  
ko ze  
kątown  
kszy o  
kąta D

Prz  
kąta A  
ła, mo  
pierws  
DE.

Prz  
dzy ra

Do  
kątown  
także  
podług  
pądku  
tów,  
z pier  
ią ten  
pierw  
od ob  
zatem  
od ką

Pr  
międz

## O Liniach stycznych z kołem 143

kąta ADB, jest razem i średnicą koła.

Dowód: Trójkąt BCD, jest równoramiennym, więc kąty B i D będą równe, a summa ich, dwa razy większą od jednego z nich: ale że kąt ACB, iako zewnętrzny, równa się tej summie kątów B i D: więc dwa razy jest większy od jednego z nich, naprzykład od kąta D.

Tab. X.  
Fig. 4. i 5.

Przypadki te, w których żadne ramie kąta ADB nie byłoby razem średnicą koła, można łatwo przywieść do przypadku pierwszego, poprowadziwszy średnicę DE.

Przypadek 2. Gdy środek C, jest między ramionami kąta ADB,

Dowód. Kąt ADB, składa się z dwóch kątów: ADE, i BDE, a kąt ACB składa się także z dwóch kątów: ACE i BCE: a że podług dowiedzenia w pierwszym przypadku, każdy z tych dwóch ostatnich kątów, jest dwa razy większy od jednego z pierwszych, którego ramiona obemyia tenże sam łuk; więc obadwa razem pierwsze kąty są też dwa razy większe od obudwóch razem kątów drugich: a zatem kąt ACB, dwa razy jest większy od kąta ADB.

Tab. X.  
Fig. 4.

Przypadek 3. Gdy środek C, nie jest między ramionami kąta ADB. Do-

Táb. X. Dowodz: Kąt ECB, dwa razy iest  
Fig. 5. większy od kąta EDB, (1. Przypadek), tén-  
że kąt ECB, składa się z dwóch kątów:  
ECA, ACB, kąt także EDB, składa się  
z dwóch kątów: EDA, ADB; a że kąt ECA  
dwa razy iest większy od kąta EDA  
(1. Przyp.) więc i kąt ACB, większy dwa  
razy będzie od kąta ADB.

788. Uwaga. Uczniowie poczynający,  
więcej doznawać zwykli trudności, w po-  
jęciu tego trzeciego przypadku, niż  
drugiego, w którym przez dodawanie to  
samo się dowodzi, co w trzecim przez  
odejmowanie. Można im to w ten spo-  
sób objaśnić, że dwie na przykład liczby  
12. i 8. z których pierwszą dwa razy iest  
większą od 6, a drugą od 4. té, mówię,  
dwie pierwsze liczby, gdy dodane będą,  
summa ich 20, będzie téż większą dwa  
razy od summy dwóch drugich liczb 6, i  
4. to iest od 10. A przeciwnie gdy na-  
przykład 12, i 8. pierwsze większe iest  
dwa razy od 6, a drugie od 4, różnica  
między 12, i 8, to iest 4; dwa razy téż  
większą będzie od różnicy między 6, i  
4. to iest od 2.

Gdyby tego była potrzeba, można by  
na liniach to samo okazać.

Táb. X. Niech będzie Linia AB, większą dwa  
Fig. 6. razy od CD, i AE większą także dwa  
razy od CF. Od punktu E, naznaczy-  
wszy

wszy  
liniów  
tak ied  
cę Lin  
dwóch  
całey li

189.  
które r  
obeymu  
wychod  
ku koła  
czy iest  
ftrych,  
ią łuk  
z Twie  
stępując  
żną, że  
przy ok  
mniał ok

190.  
cinkach  
dwóm k  
czy iest  
dziony,  
czworob  
fitym.

Nie  
odcinki:  
odcinku  
odcinku  
fitym; al



wszy na linii AB, Linie EG, EH, równe liniom FC, FD; Linie: AG, i BH, będą tak iedną, iako i drugą oznaczać różnicę Linii AE, od CF, summa zaś tych dwóch linii AG, i BH, oznaczy różnicę całej linii AB, od całej linii CD.

189. *Wniosek.* Kąty przy okręgu koła, które ramionami swemi iednakowé łuki obeymuia, są równe: albo, co na iedno wychodzi, kąty w tymże samym odcinku koła są równe. Że tak w samy rzecz jest, co do kątów przynajmniey ostrych; to jest: których ramiona obeymuia łuk mniejszy od pół okręgu, wynika to z Twierdzenia poprzedzającego. Z następującego zaś wniosek będzie łatwo można, że to samo má miejsce i w kątach przy okręgu koła, których ramiona obeymuia okrag większy od pół okręgu.

190. *Twierdz. 6.* Summa kątów w odcinkach na przemián, (174.) równa się dwóm kątóm prostym; albo co iedno znaczy jeżeli czworokąt jest kołem obwiedziony, summa kątów przeciwnych tego czworokąta, równa się dwóm kątóm prostym.

Niech cięciwa AB, dzieli koło na dwa odcinki: ADB, ACB; kąt ADB, w jednym odcinku, wraz z kątem ACB w drugim odcinku, wyrownywa dwóm kątóm prostym; albo, summa kątów D, i C, czworokąta-

Tab. XI.  
Fig. 1.

rokata kołem obwiedzionego, równa się dwóm kątom prostym.

*Przygotowanie.* Poprowadźmy Przekątną DC.

*Dowódz.* Kąty ADC, ABC, obeymują obadwa ramionami swemi łuk jeden AC, mniejszy od pół okręgu; więc są równe. Dla teyże przyczyny i kąty BDC, BAC, są równe. Summa tedy kątów ADC, BDC, to jest kąt ADB, równa się summie kątów ABC, BAC: a zatem summa kątów ADB, ACB, równa jest summie trzech kątów Trójkąta ABC; a ponieważ ta ostatnia summa wyrównywa dwóm kątom prostym; więc i tamta.

*Powtórzenie.* Jeżeli cięciwa jest razem i średnicą; dzieli koło na dwa półkoła, a w każdym tem półkole, kąty są proste.

Jeżeli cięciwa nie jest średnicą; dzieli koło na dwa odcinki, jeden większy a drugi mniejszy od pół okręgu: kąt w większym odcinku wspiera się na łuku mniejszym od pół okręgu; i jest ostry; iednakowey zawsze wielkości. Kąt zaś w mniejszym odcinku wspiera się na łuku większym od pół okręgu: i jest rozstwarty, dopełniający zawsze dwóch kątów prostych, z kątem ostrym w drugim odcinku.

191. *Twierdź.* 7. Jeżeli od punktu w od-

## O Liniiach stycznych z kołem 147

w odcinku koła, lub za odcinkiem będącego, do końców podstawy tego odcinka poprowadzimy dwie linie; kąt między temi dwiema liniami zawarty będzie w pierwszym razie większy, a w drugim mniejszy od kąta w samym odcinku.

Niech będzie punkt D, w odcinku albo za odcinkiem CAB; prowadzony od punktu tego, do końców Podstawy AB, tegoż odcinka Linie DA, DB, kąt ADB, będzie większy w pierwszym razie, a mniejszy w drugim, od kąta ACB.

Tab. XI.

Fig. 2.

**Dowód:** W pierwszym razie, kąt ADB, jest zewnętrzny Trójkąta DBC; więc jest większy od jednego z wewnętrznych kątów tegoż Trójkąta, to jest, od kąta ACB, w samym odcinku.

W drugim razie, kąt ACB, jest zewnętrzny Trójkąta CDB, a zatem większy od kąta D, albo co na jedno wychodzi, kąt D, jest mniejszy od kąta C, w odcinku.

192. *Uwaga 1.* W pierwszym razie, gdzie ramię BD przedłużone spotyka okrąg w punkcie E, kąt ADB, równa się sumie kątów: BCD, CBD, a kąt CED obeymuje swemi ramionami łuk EC, który też łuk zawarty jest między przedłużeniami ramion AD, BD, kąta ADB.

W drugim razie, gdzie ramię BD prze-

K2

cina

ciną okrag w punkcie E: kąt  $ADB$  mniejszy jest od kąta  $ACB$ , w odcinku, kątem  $CBD$ ; który to kąt  $CBD$  obeymuie swięmi ramionami łuk  $CE$ , a ten łuk  $CE$ , mniejszy jest od łuku  $AB$ , obiętego od tychże ramion  $AD$ ,  $BD$  kąta  $ADB$ .

193. *Uwaga 2.* Na okręgu koła znajdują się te wszystkie punkta, od których poprowadziwszy dwie linie do dwóch punktów danych, kąt między dwiema temi liniami zawarty, jednokowy zawsze będzie, to jest, okrag koła jest *miejszczem* (Locus) tych wszystkich punktów.

194. *Defin.* Kąt zawarty między styczną z kołem i między cięciwą przez punkt dotknięcia prowadzoną, nazywa się *kątem odcinka*.

195. *Twierdz. 8.* Kąt odcinka, równa się kątowi w odcinku na przemián.

Tab. XI. Niech będzie  $ABD$  kąt odcinka, między  $BD$ , styczną z kołem, i  $BA$ , cięciwą przechodzącą przez  $B$ , punkt dotknięcia. Ten kąt równy jest kątowi któremukolwiek w odcinku na przemián, naprzykład kątowi  $BEA$ , którego jedno ramię  $BE$  jest średnicą do punktu dotknięcia  $B$ , poprowadzoną.

*Dowód.* Kąt  $EBD$ , między średnicą  $EB$ , i styczną  $BD$ , zawarty, jest prosty (185) to jest summa kątów:  $ABE$ , i  $ABD$ , czyni kąt prosty. Kąt

O Liniiach stycznych z kołem 149

Kąt A. w półkole jest też prosty (159) więc summa kątów ABE, AEB, w tymże samym Trójkacie równa także będzie kątowi prostemu, A zatem kąt ABE tak z kątem AEB, iak i z kątem ABD, czyni kąt prosty. Muszą tedy równie być kąty AEB, i ABD, kiedy przydany każdy z osobna do kąta ABE, czyni równą sumnę.

166. Zagadn. 4. Na linii daney zrobić odcinek koła, w którym odcinku zmieściłby się kąt dany.

Niech będzie linią AB, na której zrobićby trzeba ten odcinek. Tab. XI.  
Fig. 3.

Rozwiązanie. Od punktu B. prowadzę linią BD, czyniącą kąt dany z linią daną BA. Od tegoż punktu B, wyprowadzam prostopadłą do BD, a od punktu A, drugą prostopadłą do AB. Punkt E, przecięcia tych dwóch prostopadłych, wyznaczy mi wielkość średnicy BE, należący do tego koła, w którego odcinku ma się mieścić kąt dany.

Albo też: Od środka linii daney AB, prowadzę Prostopadłą którą przecinie linią BE, w punkcie mającym służyć za środek koła, w którym będzie odcinek żądany.

Zamiast robienia kąta ABD, równego danemu, można by zrobić kąt ABE, do-  
peł-



pełniający kąt dany do 90. stopniów, to jest, czyniący z nim razem kąt prosty.

197. Zagadn. 5. Mając dane koło, oddzielić od niego odcinek, w którymby się zmieścił kąt dany.

Rozwiąz: Od punktu któregokolwiek na okręgu koła danego, ciągnę styczną, a przez punkt dotknięcia prowadzę cięciwę czyniącą kąt dany z styczną. Ta cięciwa oddzieli w kole odcinek żądany.

198. Zagadn. 6. W koło dane wpisać (inscribere) Trójkąt, któryby miał kąty wszystkie równe kątom Trójkąta danego.

Rozwiąz: 1. Pociągnawszy styczną przez którykolwiek punkt okręgu koła, przez tenże punkt prowadzę dwie cięciwy po prawey i po lewey ręce, czyniące dwa kąty równe kątom Trójkąta danego. Liniją trzecią łączącą końce tych dwóch cięciw, będzie trzecim bokiem Trójkąta, którego kąty wszystkie równe będą kątom Trójkąta danego.

Rozwiąz: 2. Trójkąt dany opisać (circumscribo) kołem, i do trzech wierzchołków kątów, prowadzę od środka trzy promienie. Od tegoż samego środka, kreślę koło, promieniem koła danego. Punkta, w których okrag tego drugiego koła, przecinać będzie promienie trzy  
pierz-

**O Liniałach stycznych z kołem** 151

pierwszego, będą wierzchołkami kątów Trójkąta, którego szukam.

199. *Zagadn.* 7. Mając dany Trójkąt, wpisać wń koło, to jest narysować takie koło, któreby się dotykało trzech boków tego Trójkąta.

*Rozwiąz.* Środek tego koła, ponieważ jednakowo ma być odległy, od wszystkich trzech boków Trójkąta danego, musi się gdzieś znajdować na linii dzielącej kąt którykolwiek Trójkąta na dwie równe części: gdyż tey linii odległość punktów wszędzie będzie równa od dwóch boków Trójkąta iędy przyległych: podzieliwszy na dwie równe części, i drugi kąt Trójkąta drugą linią; tam gdzie ta druga linia przetnie pierwszą, będzie środek koła, którego szukamy: bo ten punkt przecięcia będzie jednakowo odległy od wszystkich trzech boków Trójkąta danego.

200. *Zagadn.* 8. Mając dane koło, o pisać na nim (*circumscribere*) Trójkąt, któryby miał kąty wszystkie równe kątóm Trójkąta danego.

*Rozwiąz.* 1. W Trójkąt dany wpisuję koło; i do Punktów trzech dotknięcia, prowadzę trzy promienie. Od tegoż samego środka kręślę drugie koło, promieniem koła danego. Punkta, w których  
okrag

okrąg tego drugiego koła przecinać będzie promienie trzy pierwszego, albo ich przedłużenia oznaczają trzy punkta dotknięcia trzech boków Trójkąta, którego szukam.

Rozwiąż: 2. W czworokącie, który się zrobi z dwóch promieni koła danego, i ze dwóch stycznych z kołem w końcach tychże promieni, kąty dwa między temi promieniami i stycznymi będą proste; a zatem kąt ieden między dwiema stycznymi, i drugi kąt między dwoma promieniami, będą razem wzięte, równe dwóm kątom prostym. (85) Stąd wypada wykreślenie następujące.

Prowadzę promień ieden w kole danem: po obudwóch stronach tego promienia, prowadzę dwa insze czyniące z pierwszym dwa kąty, równe kotóm dwóm dopełniającym dwa którekolwiek kąty Trójkąta, do 180. stopniów, to jest, równe dwóm kątom przyległym (14) do dwóch którekolwiek kątów tegoż Trójkąta. Przez końce tych trzech promieni przeciągam trzy styczne, te zrobią Trójkąt żądany.



Wstęp do Proporcji przez przykła: 193

## R O Z D Z I Á Ł VIII.

*Wstęp do Proporcji przez przykłady Geometryczne, z przystosowaniem w szczególności do Trójkątów podobnych, a w ogólności do inszych Figur prostokręślnych także podobnych.*

**D**otąd uważaliśmy tylko wielkość różnych Iłości i Figur, co do przystawiania iednych do drugich, czyli do ich równości. Teraz też same ilości porównywać z sobą będziemy w sposób ogólniejszy.

201. *Uwagi.* Widzieliśmy, że dwa równoległoboki, które miały iednakową podstawę i wysokość były równe. Weźmy teraz dwa równoległoboki z równą wysokością, ale z nie iednakową podstawą, i obaczmy co za różnica wypadnie między temi dwoma równoległobokami, z przyczyny nie równości ich Podstaw.

Jeżeli Podstawa iednego z tych równoległoboków, dwa, trzy, cztery, i t. d. razy, większą będzie od podstawy drugiego; da się podzielić ten pierwszy równoległobok, na dwa, trzy, cztery, i t. d. równoległoboki równe między sobą, i z drugim równoległobokiem: ponieważ  
wszy-

wszystkie iednakowe mieć będą wysokości, i podstawy; a zatem ten pierwszy równoległobok będzie dwa, trzy, cztery, i t. d. razy większy od drugiego.

Gdyby podstawa pierwszego równoległoboku nie zamykała w sobie kilka zupełnie razy podstawy drugiego równoległoboku; na przykład, gdyby ta pierwsza podstawa, miała w sobie 4, 5, 7, i t. d. takich części, i takich podstawa druga ma 3; można by tę pierwszą podstawę podzielić na 4, 5, 7. i t. d. części równych między sobą, i równych także każdej z 3. części drugiej podstawy; a zatem, iako liczby ukazujące wielkość podstawy pierwszego równoległoboku względem podstawy drugiego, są 4, 5, 7, i t. d. i 3; tak też liczby ukazujące wielkość pierwszego równoległoboku względem drugiego, są 4, 5, 7, i t. d. i 3. Albo; iako podstawa pierwszego równoległoboku, zamyka w sobie podstawę drugiego tyle razy, ile oznaczają liczby ułomkowe  $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{5}{3}$ ,  $\frac{7}{3}$ , i t. d.; tak też pierwszy równoległobok zamyka w sobie drugi, tyle razy, ile oznaczają te same liczby ułomkowe  $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{5}{3}$ ,  $\frac{7}{3}$ , i t. d.

Podobnie gdy dwa Trójkąty mają równe wysokości, a nie równe podstawy, jeżeli podstawa pierwszego Trójkąta zawierając w sobie będzie podstawę drugiego, dwa, trzy, cztery i t. d. razy; to też po-  
wierz-



*Wstęp do Proporcji przez przykła: 155*

wierzchnią tego pierwszego Trójkąta, będzie dwa, trzy, cztery i t. d. razy większą od powierzchni drugiego. Toż mówić, gdy podstawa jednego Trójkąta, zawierał w sobie kilka zupełnie razy podstawę drugiego, będzie się tylko składała z kilku takich części równych, z jakich się składa i podstawa Trójkąta drugiego. J tak jeżeli podstawy obudwóch Trójkątów zamykaia w sobie, jedna 4, a druga 5, takichże równych części, té też dwa Trójkąty zamykać będą ieden 4, a drugi 5, równych między sobą Trójkątów mających wysokość jednakową z wysokością niepodzielonych Trójkątów, a za podstawę, część iedną tylko podstawy tamtych Trójkątów. A zatem, iako podstawa pierwszego Trójkąta iest  $\frac{4}{5}$  podstawy drugiego, tak téż i powierzchnia pierwszego Trójkąta będzie  $\frac{4}{5}$  powierzchni drugiego.

Dwa kąty mające swoje wierzchołki weśrzedku tego samego koła, albo kół równych, i obeymujące ramionami swemi łuki równe, są równe (174).

Jeżeli tedy z dwóch kątów weśrzedku kół równych, ieden wspiera się na łuku, dwa, trzy, cztery i t. d. większym, niżeli iest ten na którym wspiera się kąt drugi; można tamten kąt większy podzielić na dwa, trzy, cztery i t. d. kątów równych sobie

sobie i kątowi drugiemu. Toż samo mówić można gdy dwa łuki nie zupełnie się zamykają ieden w drugim. I tak jeżeli ieden z tych łuków może być podzielony na 4. równe części, a drugi na 3. także części; dwa kąty, które się wspierają na tych łukach, mogą się podzielić, ieden na 4, a drugi na 3. kąty równe między sobą.

Toż samo przytósować można i wycinkom w kołach równych; względem łuków, które ramionami swemi też wycinki obeymują.

W takich szczególnych razach, szukano, ilekroć dwie iakie ilości jednakowego gatunku, naprzykład dwie linie, dwa łuki, koła, zamykały się jedna w drugiey, a znaylowano, że tylekroć i insze dwie ilości jednakowego także gatunku zamykały się jedna w drugiey, naprzykład: dwa Równoległoboki, dwa Trójkąty, dwa wycinki i. t. d.

202. *Definicye.* Gdy dwie iakie ilości do siebie przyrównywamy, abyśmy wiedzieli, ile razy jedna zamyka w sobie drugą; takie przyrównywanie nazwać można stosunkiem Geometrycznym (*Ratio-Geometrica*) albo bez przydatku stosunkiem tych dwóch ilości. Pierwszy wyraz ilości, którą do drugiey stosniemy, zwąć będziemy *Poprzednikiem* stosunku (*antecedens rationis*;) Drugi zaś wyraz ilości

tęy

*Wstęp do Proporcji przez przykład: 157*

tey, do której przyrównujemy ilość pierwszą, nazwiemy *Następnikiem* (*consequens*) stosunku. To co z tego przyrównania wynika, nazwać można *Wykładnikiem* stosunku (*exponens rationis*.) Dwa stosunki nazywają się *równymi*, gdy równymi są ich wykładniki.

203. *Uwaga.* Z tych samych Defini-cyy widzimy, że wyrazy stosunku Geome-trycznego, nie mogą być tylko jednako-wego gatunku, gdyż nie można do siebie przyrównywać, tylko ilości jednakowe-go gatunku: a stąd dwa wyrazy stosunku tego, zawsze w liczbach mieć możemy, z których jedna tyle razy zamykać w so-bie drugą będzie; ile razy ilość przyrów-nywać się mającą, zamyka w sobie dru-gą ilość tegoż gatunku, do której ją przy-równujemy. Przeto stosowanie takie u-ważać można jak dzielenie liczby biorąc za liczbę podzielną poprzednika stó-sunku, za liczbę dzielącą następnika stó-sunku, a za wieloraz wykładnika tegoż stosunku. Wykładnik tedy jedno będzie, co ułamek, którego Licznikiem Poprzed-nik, a mianownikiem następnik stó-sunku.

204. Gdy się cztery ilości takie znają-dują, że stosunek dwóch pierwszych, równy jest stosunkowi dwóch drugich; takie cztery ilości czynią *Proporcją Geo-metryczną*, albo bez przydatku, *Proporcją*;  
i mó-

i mówimy, że tak się má Poprzednik pierwszego stosunku, do swęgo następni-ka, iak się má Poprzednik drugiego stó-sunku do swęgo także Następniaka. I tak, przypadki szczególne, któreśmy za przy-kład wyżej przytoczyli, takby mogły byđz wyrażone.

Jeżeli dwa Równoległoboki iednako-wą mają wysokość, powierzchnia iednego z nich, tak się będzie miała do powierz-chni drugiego; iak się má podstawa pier-wszego, do podstawy drugiego. Jeżeli dwa Trójkąty iednakowe mają wysokość, powierzchnia iednego Trójkąta, tak się má do powierzchni drugiego Trójkąta, iak się má podstawa pierwszego do podsta-wy drugiego.

Jeżeli dwa kąty we śródku dwóch równych kół znajdują się; ieden z tych kątów, tak się mieć będzie do kąta dru-giego, iak się má łuk objęty od ra-miön pierwszego kąta, do łuku objęte-go od ramiön drugiego kąta.

Jeszcze i tak możnaby te same poda-nia wyrazić: Dwa równoległoboki ie-dnakowey wysokości tak się mają do siebie, iak ich podstawy.

Dwa Trójkąty iednakowey wysoko-ści, tak się mają do siebie, iak ich pod-stawy.

Dwa

*Wstęp do Proporcji przez przykład: 159*

Dwa kąty we środku kół równych tak się mają do siebie, jak dwa łuki, na których się wspierają. Toż mówić i o wyciekach kół równych.

Na koniec jeszcze króćcy zwykły się czasem wyrażać podobne podania, zamykając całą proporcję w dwóch tylko na oko wyrazach, i to jeszcze za niezręcznych ilości odmiennego gatunku. *Wale na tem zawisto, aby Uczniowie znali się dobrze na takowych wyrazach często używanych.*

Mówi się naprzykład, że powierzchnia równoległoboku, którego wysokość jest *jednostayną* (constans) proporcjonalną jest do swojej podstawy.

Tu się opuszcza wyraz drugiego równoległoboku, który także wchodzi w porównanie, i jego podstawy; ale się wyrazów tych domyślać trzeba. Dla tego się zaś opuszczają, że ten drugi równoległobok równy z pierwszym wysokości bydl mniemamy, i jednostayny, to jest nieodmienny podstawy, a zatem i powierzchni. Będzie tedy pierwszy równoległobok tym większy albo mniejszy względem drugiego równoległoboku opuszczonego; im podstawa pierwszego większa lub mniejsza jest od podstawy drugiego. Tak, niech pierwszy równoległobok ma wysokości 3. łokcie, rów-  
nie



wnie iak i drugi; jeżeli ten drugi równoległobok mieć będzie podstawę łokci 4, zawsze iednostayną i nie odmienną, a zatem i iednostayną powierzchnią 12, łokci kwadratowych; pierwszy równoległobok tym większy lub mniejszy będzie od drugiego, to jest, tym większą lub mniejszą mieć będzie powierzchnią od drugiego, im większą lub mniejszą damy mu podstawę od drugiego. Dávszy mu naprzykład podstawy 8. łokci, będzie powierzchnią iego 24. łokci kwadratowych, dwa razy większą od powierzchni drugiego równoległoboku: dávszy mu podstawy 2. łokci, będzie powierzchnią iego 6. łokci kwadratowych, dwa razy mniejszą od powierzchni tegoż równoległoboku, i t. d. Gdy tedy ten pierwszy równoległobok, albo powierzchnią iego, tyle się tylko powiększą lub pomniejszą względem powierzchni drugiego równoległoboku, ile się powiększy lub pomniejszy podstawą iego względem podstawy drugiey iednostaynéy; dosyć jest więc powiedzieć w takim razie, że powierzchnią tego równoległoboku, którego wysokość iednostayną, proporcjonalną jest do swoiey podstawy, to jest, gdy podstawa dwa razy naprzykład większą będzie, powierzchnią też większą będzie dwa razy: gdy tamta dwa razy mniejszą, to i ta, i t. d.

205. Niech będą cztery ilości ozna-

czo-

Wstęp

czoné  
sowa  
sunek  
cym A  
A, tak  
D. D  
dwóma  
ności s  
dnego  
nie w  
stósunk

206.  
pium) l  
wynika

1. J  
ciému;

2. J  
pierwsz  
trzem p  
to i cz

3. S  
ténże s  
ściami p  
Tak nap  
4, albo  
że moż  
przez i  
lub dwa  
narusza  
miż czt

Wstęp do Proporcji przez przykład: 161

czone przez ABCD, które do siebie stósować można; zgodzono się; aby stósunek ten wyrazić kształtem następującym  $A:B=C:D$ ; co się tak wymawia: A, tak się ma do B, jak się ma C, do D. Dwa punkta umieszczone między dwoma wyrazami każdego, w szczególności stósunku znakiem są dzielenia iednego wyrazu przez drugi; dwie zaś linie w pośrodku znaczą równości dwóch stósunków.

206. Wnioski. Z tych zasad (princypium) któreśmy o proporcjach założyli, wynikają następujące podania.

1. Jeżeli dwa stósunki są równe trzeciemu; równe też i sobie będą.

2. Jeżeli w dwóch Proporcjach trzy pierwsze wyrazy w jednej, równe są trzem pierwszym wyrazom w drugiej; to i czwarte wyrazy równe też będą.

3. Stósunek między dwiema ilościami tenże sam jest, co i między temiż ilościami podwoionemi, potroionemi i t.d. Tak na przykład 4. ma się do 2, jak 8 do 4, albo jak 12 do 6. i t.d. Stąd wynika, że można podzielić, albo rozmnożyć przez iednakową liczbę dwa pierwsze lub dwa ostatnie wyrazy Proporcji, nie naruszając przeto proporcji między temiż czterema wyrazami.

L. 4.

4. Można także podwoić, potroić, i t.d. obadwa Poprzedniki, albo obadwa Następniki, a proporcya wszelako będzie zachowana. W pierwszym razie wykładnik stósunków, stanie się dwa, trzy, i t.d. razy większym, niż był z początku: w drugim zaś razie będzie tylko połową, trzecią częścią, i t.d. Wykładnika pierwszego.

5. W téż samey proporcyi, można odmienić mieysce obudwóm Poprzednikom, to jest, położyć tam Poprzedniki, gdzie były Następniki, a Następniki tam, gdzie były Poprzedniki; równość jednak i po téj odmianie zachowana będzie między dwoma stósunkami téż samej proporcyi. I tak na przykład w téj Proporcyi:  $4:2=12:6$ , można odmienić położenie Poprzedników: 4 i 12. i napisać:  $2:4=6:12$ , wszelako jednak zachowa się Proporcya: bo iako w pierwszey proporcyi wykładniki stósunków obudwóch: 4:2, i 12:6, były równe, to jest tak, 4 przez 2, iak 12 przez 6, podzielone dawały na wykładnika, albo na wieloraz, 2; tak i w drugiey proporcyi, wykładniki stósunków 2:4 i 6:12 są równe; to jest, tak 2, przez 4 iak i 6, przez 12 podzielone, dają na Wykładnika, albo na wieloraz jednakowy ułomek:  $\frac{1}{2}$ . Też mówić i o podobney odmianie w jakiegokolwiek inszey Proporcyi:

Wstę  
cyi:  
wyr

6  
wied  
pierw  
dnég  
má  
wyr  
zów  
też  
albo

J  
step  
do n  
każ  
wiel  
a za  
sunk

step  
do  
nim  
ka  
pot  
stós  
żey  
lub  
stos

Wstęp do Proporcji przez przykła: 163  
 cy: co tak można ogólnie przez litery  
 wyrazić:

Jeżeli  $A : B = C : D$ .

to też i  $B : A = D : C$ .

6. W proporcji każdy można po-  
 wiedzieć, że summa, albo różnica dwóch  
 pierwszych wyrazów, tak się ma do ie-  
 dnego z tych dwóch wyrazów, iak się  
 ma summa albo różnica dwóch drugich  
 wyrazów, do iednego z tychże wyra-  
 zów. Naprzykład jeżeli  $4:2=12:6$ , to  
 też będzie  $6:2=18:6$ , albo  $6:4=18:12$ ,  
 albo  $2:4=6:12$ .

Jakoż jeżeli każdą Poprzednika i Na-  
 stępnika summę lub różnicę stósujemy  
 do następnika iey własnego; Wykładnik  
 każdego w szczególności stósowania po-  
 większy się lub pomniejszy iednością,  
 a zatem równy będzie w obudwóch stó-  
 sunkach i po takiej odmianie.

Jeżeli zaś każdą Poprzednika i Na-  
 stępnika summę lub różnicę stósujemy  
 do Poprzednika iey własnego, iedno czy-  
 nimy, iak gdybyśmy pierwey poprzedni-  
 ka każdego za Następnika położyli, a  
 potem dopiero, summę lub różnicę ich  
 stósowali do następników, tak iak wy-  
 żey; a zatem też częścią pomnoży się  
 lub zmniejszy wykładnik pierwszego  
 stosunku, iak i drugiego.

Wyrażenia literalne tegoż samego.

Jeżeli  $A : B = C : D$ .

to też  $A + B : B = C + D : D$

$A - B : B = C - D : D$

$A : B + C = A : C + D : C$

$A - B : A = C - D : C$ .

Gdyby Następniki większe były od swoich Poprzedników, naprzykład B od A, i D od C, tę proporcję  $A : B = C : D$  można by w tę zamienić  $B : A = D : C$  a zatem.

$B - A : A = D - C : C$

$B - A : B = D - C : D$ .

7. Gdy w Proporcji, cztery wyrazy iednego są gatunku, toiest, gdy wszystkie znaczą n.p. linie, lub powierzchnie i t.d. można powiedzieć, że summa dwóch Poprzedników, tak się ma do summy dwóch Następników; iak się ma którykolwiek poprzednik do swęgo następnika.

Jakoż, jeżeli ieden Poprzednik zamyka naprzykład dwa, trzy i t.d. razy swęgo Następnika, i drugi też Poprzednik, tyle razy następnika swęgo. zamykać w sobie będzie; a zatem i summa Poprzedników, tyle też razy zamykać będzie sumnę następników. Przeto summa Poprzedników tak się mieć będzie do summy



*Wstęp do Proporcji przez przykład: 165*

my następników, iak każdy w szczególności Poprzednik idzie swęgo Następnika. To, samo rozumowanie przystosować można do różnicy dwóch Poprzedników i do różnicy, dwóch następników, i do więcéy iak dwóch równych stosunków.

Wszystkie té odmiany na wielu przykładach liczebnych objaśnić należy.

207. *Uwaga.* Dadzą poznać Nauczyciele Ucznióm swoim, że *Reguła trzech*, jest pewnym gatunkiem proporcji, w której z trzech wyrazów znaniomych, szukamy czwartego nieznaniego: co samo na przykładach iakich rachunkowych pokazać trzeba. Mnożenie nawet i dzielenie, do proporcji przyrównać można: bo w mnożeniu liczby, mnożna i mnożaca, są średniemi wyrazami proporcji, iedność jest pierwszym wyrazem proporcji, a liczba rozmnożona jest ostatnim wyrazem. I tak naprzykład:  $4 \times 3 = 12$ . rozłożyć można na proporcję następującą:  $1:4=3:12$ . W dzieleniu zaś, liczba dzieląca i wieloraz są średniemi wyrazami proporcji; iedność jest wyrazem pierwszym: a liczba podzielna jest ostatnim wyrazem. I tak, naprzykład,  $\frac{8}{4}=2$ , albo  $8:4=2:1$ , rozłożyć można na proporcję następującą  $1:4=2:8$ . Więcéy ieszcze takowych przykładów podadzić nie zawadzi.

208. *Twierdzenie 1. fundamentalne.*  
 Gdy w Trójkącie jakimkolwiek bok jeden przedłużając go powiększymy dwa, trzy, cztery pięć i t. d. razy, i przez końce takiego przedłużenia poprowadzimy równoległe od boku drugiego aż do boku trzeciego także przedłużonego; zrobią się tym sposobem Trójkąty których i inne dwa boki większe też będą od boków pierwszego Trójkąta, dwa, trzy: cztery, pięć i t. d. razy.

Tab. XI. Niech na przykład będzie trójkąt ABC, któregośmy bok AB, tak przedłużyli, aby linią AD, dwa razy była większą od AB. Przez D. poprowadziwszy DH równoległą od BC; Linią DH. dwa razy też większą będzie od linii BC, a linią AH dwa razy większą od linii AC.

*Wykreślenie.* Przez punkt C. poprowadźmy CN równoległą od AB, która by spotkała w punkcie N, linią DH.

*Dowódz.* Czworokąt BDNC, jest równoległobokiem; więc boki w nim przeciwne są równe to jest,  $BC = DN$ , a  $BD = CN$ : a że  $BD = AB$ ; więc i  $CN = AB$ . Kąty jednostronne A, i NCH są równe, iako też i kąty jednostronne ACB, AHD: a zatem Trójkąty ACB, CHN dla równości kątów wszystkich i boków. AB, CN równych, mogą przystać do siebie, i będzie  $AC = CH$ , a tém samém  $AH = 2 AC$ , to jest,

*Wstęp do Proporcji przez przykład: 167*

jest, linią AH dwa razy większą od AG.  
Jest też i  $BC = NH$ , a tém samym  $DH = 2 BC$ , to jest, linią DH dwa razy większą od BC. Weźmy znowu Linią AE trzy razy większą od AB, i poprowadźmy EI równoległą od BC. Podobnie, jak wyżej, dowieść będzie można, że też linią EI trzy razy jest większą od BC, a AI trzy razy większą od AC: co się łatwo okaże po-  
ciągnawszy linią HQ równoległą od AE: bo dla równości kątów wszystkich, i boków AB, HQ, Trójkąty ABC, HOI przystaną do siebie, a zatem  $AC = HI$ , i  $BC = OI$ . A że  $EO = DH$ , a  $DH = 2 BC = 2 OI$ , więc  $EO = 2 BC$ , a zatem  $EI = 3 BC$ . Tak też i  $AI = AH + HI = 2 AC + HI = 3 HI$ .

Tymże sposobem dowodzi się, że jeżeli linią AF, cztery razy będzie większą od linii AB, Linią też FL równoodległą od BC, cztery razy od niej większą będzie; i linią AL, cztery także razy większą od AC, i t. d.

209. Zagadn. 1. Podzielić daną Linią na ilekolwiek części równych.

Niech na przykład będzie linią daną AG, którą podzielić mamy na 5 części równych.

Rozwiązanie. Od końca jednego, na przykład A, linii danej AG, prowadzę  
dru-

drugą linią AM, iakieykolwiek długości, czyniącą z linią daną, kąt iaki mi się podobą. Od A ku M, biorę tyle części równych na linii AM, na ile ich má bydź podzieloną linią AG; tu naprzykład biorę 5. części równych. Punkt M. Linii AM, gdzie się ostatnia część podziału kończy, łączę linią MG z punktem G, Linii danej AG. Przez ihsze podziału punkta: L, I, H, C, prowadzę równoodległe od linii M G, do linii AG. Te równoodległe: LF, IE, HD, CB, wraz z linią MG przecinać będą linią daną AG w punktach podziału żadanego.

Podobnym sposobem postąpić sobie trzeba, gdy na więcej lub mniej części podzielić przypadnie linią daną.

Dla większey łatwości, w prowadzeniu równoodległych, można użyć następującego sposobu, zwłaszcza gdy na wiele równych części przypada dzielić linią daną.

Chcąc naprzykład podzielić linią AB na 5. równych części, prowadzę od końca iey jednego A linią AC pod iakimkolwiek kątem, i od drugiego końca B, prowadzę linią BD; od pierwszey równoodległą. Dzielę od punktu A linią AC, na pięć iakichkolwiek równych części i na takież pięć równych części od punktu B, dzielę linią BD. Punkta podziałów równych

Táb. XI.  
Fig. 5.

Wstęp do Proporcji przez przykład: 169

równych w obudwóch liniach, łączę ty-  
łaż równoodległemi; tę przetrną linią da-  
ną AB w punktach podziału żadanego.

Dowodzenie tego nie różni się od po-  
przedzającego, gdyż w równoległoboku  
ACBD, uważać można ieden tylko Tró-  
kat, BAC, lub ABD; a zatem równość  
części, Linii AB, podobnie się, jak  
w pierwszym Twierdzeniu dowiedzie. (p)

210. Twierdz: 2. Dwa Trójkąty ró-  
wnokątne, mają proporcjonalne boki  
przeciwnie kątóm równym.

Niech będą dwa Trójkąty AGM, i abc, Tab. XI.  
w których kąty A i a, G i b, M i c są równe. Fig. 4. i 6.  
Niech na przykład bok AG, będzie pięć ra-  
zy większy od boku ab; będzie też i bok  
AM, pięć razy większy od boku ac, i bok  
GM, pięć razy także większy od boku bc.

Jakoż odciawszy Linią AB, równą linii  
ab, i AC, równą ac, i pociągnawszy linią  
BC, Trójkąty ABC, abc, będą mogły  
przystać do siebie, a w szczególności kąty  
B

(p) Rozwiązując tymże podobne Zagá-  
dnienie, niecháy nie przestają Uczniowie na  
Figurze podaney, ale niech sami króślą sobie  
podobną Figurę, i na nię rozwiązią Zagá-  
dnienie. Figura podana niech im tylko służy  
do łatwiejszego w czytaniu zrozumienia Pro-  
pozycji, którą gdy już dobrze zrozumieją;  
niecháy, zamknawszy nawet Książkę, na Fi-  
gurze osobnéy od nich nakręślonéy pokaza  
Nauczycielóm, że to, co czytali, dokładnie  
zrozumieli, i umieją się dobrze wytłumaczyć.



B i b, C i c będą równe. A że też kąty G i b, M i c są równe; więc równe także są i kąty G i B; M i C; a zatem linie BC, GM będą równoodległe. Przeto według pierwszego Twierdzenia, jeżeli AG jest pięć razy większą od AB, czyli od ab; będzie też i AM pięć razy większą od AC, czyli od ac, i GM pięć razy większą od BC czyli od bc. Toż samo mówić się mogło, gdyby dwa boki Trójkątów, przeciwnie równym kątom nie pięć, ale mniey lub więcej zupełnych razy w sobie się zamykały.

Gdyby zaś dwa boki w dwóch Trójkątach, przeciwnie kątom równym, nie zamykały się zupełnie jeden w drugim, ale jeden naprzykład z tych boków miał w sobie 7. takich równych części, iakich drugi má tylko 3; w takim razie insze też boki równym kątom przeciwnie, w tychże Trójkątach nie zamykałyby się zupełnie jeden w drugim, ale jeden składałby się z 7, takich części, z iakich 3. składa się drugi. Tak na *Figurze* 7, gdzie Trójkąty ABC, abc, są równokątne i bokom AB, ab, taká długość daná, żeby bok AB, zamykał w sobie 7, części równych linii AD, a bok ab, takież miał 3. tylko części równe linii AD, albo ad; w tych Trójkątach poprowadziwszy linie DE, de, równoodległe od BC, bc; boki AC i ac, mieć też będą pierwszy 7. drugi 3, części równe linii AE, albo ae, a boki BC i bc, zamykać także

*Wstęp do Proporcji przez przykład: 171*

także będą pierwszy 7, a drugi 3, części równe linii DE, albo de. Toż mówić; gdyby boki dwóch Trójkątów, przeciwne kątom równym, więcej lub mniej części równych w sobie zamykały.

211. *Prześtroga.* W dwóch Trójkątach równokątnych, których boki porównywać z sobą mamy dobrze iest wierzchołki kątów równych naznaczać podobnemi literami: naprzykład, gdy nad wierzchołkiem kąta w jednym Trójkącie napiszemy literę A, napiszmy i nad wierzchołkiem kąta równego pierwszemu w drugim Trójkącie literę a: gdy nad drugim kątem, w pierwszym Trójkącie będzie B, niech i nad drugim kątem równym tamtemu w drugim Trójkącie będzie b, i t.d. Tym sposobem i boki przeciwne równym kątom w obudwóch Trójkątach, będą podobnemi też literami naznaczone: a zatem, gdy w Proporcji weźmiemy naprzykład boki AB, ab, za Poprzedniki stósunku, za Następniki włożyć będzie potrzeba boki AC, ac, albo BC, bc, i dla tego wszystkie te proporcje będą dobre;  $AB:ab=AC:ac$ ,  $AB:ab=BC:bc$ , albo  $AC:ac=AB:ab$ ,  $BC:bc=AB:ab$ , albo,  $AC:ac=BC:bc$ , albo  $BC:bc=AC:ac$ .

212. *Twierdza.* 3. Jeżeli we dwóch Trójkątach, kąty dwa którekolwiek są równe i boki dwa około każdego z tych kątów

kątów proporcjonalne; takie Trójkąty będą równokątne.

Niech będą dwa Trójkąty  $ABC$ ,  $abc$ , i w tych kąty  $A$  i  $a$  równe boki zaś  $AB$ ,  $ab$ , i  $AC$ ,  $ac$ , około tych kątów proporcjonalne; to jest, niech się ma tak  $AB$  do  $ab$ ; iak  $AC$  do  $ac$ , czyli  $AB:ab = AC:ac$ . W takim razie będą też równe kąty  $B$ ,  $b$ , i kąty  $C$ ,  $c$ , a zatem i stosunek boków  $BC$ ,  $bc$ , będzie ten sam, co i boków  $AB$ ,  $ab$ , albo  $AC$ ,  $ac$ .

*Wykreślenie.* Na boku  $AB$ , weźmy linię  $AD$ , równą  $ab$ , i poprowadźmy  $DE$  równoległą od  $BC$ , i spotykającą  $AC$  w Punkcie  $E$ .

*Dowódz:* Trójkąty  $ABC$ ,  $ADE$ , są równokątne; więc (iako się w drugim Twierdzeniu dowiodło)  $AB:AD$ . (albo  $ab$ )  $= AC:AE$ . A że  $AB:ab = AC:ac$ , więc  $AE = ac$ ; a zatem Trójkąty  $ADE$ ,  $abc$  mogą przystać do siebie: że zaś Trójkąty  $ABC$ ,  $ADE$ , są równokątne; więc równokątne także będą i Trójkąty  $ABC$ ,  $abc$ , a zatem,  $AB:ab = BC:bc$ .

213. *Twierdż: 4.* Jeżeli w dwóch Trójkątach, trzy boki w jednym są proporcjonalne względem trzech boków w drugim, takie Trójkąty będą równokątne.

Niech będą dwa Trójkąty,  $ABC$ ,  $abc$ ,  
i bo-

## Wstęp do Proporcji przez przykład: 173

i boki w nich proporcjonalne, tak, że  $AB: ab = AC: ac$ , i  $AB: ab = BC: bc$ , te dwa Trójkąty są równokątne.

*Wykreślenie.* Weźmy linią  $AD$  równą linii  $ab$ , i poprowadźmy  $DE$  równoległą od  $BC$ .

*Dowód:* Trójkąty  $ABC$ ,  $ADE$  są równokątne, więc  $AB: AD$  (albo  $ab$ )  $= AC: AE$ .

A że też jest  $AB: ab = AC: ac$

więc  $AD = ac$

Podobnie  $AB: AD$  (albo  $ab$ )  $= BC: DE$

A że też jest,  $AB: ab = BC: bc$

Więc  $DE = bc$

A zatem dwa Trójkąty  $ADE$ ,  $abc$ , wszystkie trzy boki mają sobie równe, i dla tego, mogą przystać do siebie, i są równokątne. A że też są równokątne i Trójkąty  $ABC$ ,  $ADE$ , więc równokątne także będą Trójkąty  $ABC$ ,  $abc$ .

214. *Twierdzenie 5.* Niech będą dwa Trójkąty mające kąt jeden prosty, rozwarty, lub ostry równy w obudwóch Trójkątach, i niech stosunek ramion przy tych kątach będzie równy stosunkowi boków przeciwnych tymże kątów. Te dwa Trójkąty będą równokątne, byleby w trzecim przypadku, boki przeciwnie

wne kątowni ostrému większe były w obudwóch Trójkątach, niżeli ramiona po iedney lub po drugiey stronie przyległe temuż kątowni: albo, chociaż té boki przeciwné mnieysze będą od ramion, byleby inszy kąt w obudwóch Trójkątach był rozwartý, lub ostry, który iedno ramie, má spólne z kątem pierwszym, równym w obudwóch Trójkątach. Niechby naprzykład były dwa Trójkąty ABC, abc, w których kąty A i a, równe, i stósunek ramienia AC do ac, taki, iaki boku BC, do bc. Té dwa Trójkąty będą równokątne.

Tábl. XII. 1. Gdy kąty A i a, obadwa są proste.  
Fig. 2.

Fig. 3. 2. Gdy kąty A i a, obadwa są rozwarté.

Fig. 4. 3. Gdy kąty A i a, obadwa są ostre, ale boki BC, bc, większe od ramion AC ac.

Gdy kąty A i a, obadwa są ostre, ale boki BC, bc, mnieysze od ramion AC, ac: i kąty B i b, obadwa ostre, Fig. 5. albo obadwa rozwarté Fig. 6.

Wykreślenie powszechné. Weźmy linią AD, równą ac, i poprowadźmy DE równoodległą od BC.

Dowodz: Trójkąty ACB, ADE są równokątne.

Więc



Wstęp do Proporcji przez przykta: 175

Wiec  $AC:AD$  (albo  $ac$ )  $= BC:DE$

Ale też jest  $AC:ac = BC:bc$

wiec  $DE = bc$

A zatem dwa Trójkąty  $ADE$ ,  $acb$ , mogą przystać do siebie, i są równokątne: a że też i Trójkąty  $ACB$ ,  $ADa$  są równokątne; więc równokątne także będą i Trójkąty  $ACB$ ,  $acb$ . (q)

215. Def. Gdy w dwóch Figurach prostokreślnych równe się kąty wszystkie znajdując iedne względem drugich, i boki około tych kątów proporcjonalne; takie Figury nazywają się podobnemi (Figurae similes.)

216. Uwaga. Po przytoczonych dowodzeniach Twierdzeń poprzedzających iasnie się pokazuje, że równość kątów w dwóch Trójkątach, pociągá za sobą proporcjonalność ich boków, i wzajemnie proporcjonalność boków w dwóch Trójkątach wywodzi równość kątów w tychże Trójkątach. W jnszych zaś Figurach prostokreślnych, które z więcéy niż

---

(q) Dla skrócenia, różne té przypadki w jedném powszechném zamknęto się dowodzeniu; lepiéy jednak będzie, každého z osobna przypadku osobno Ucznióm dowodzić, aby wielu razem okoliczności wystawieniem, baczność ich nie była róztargnioná.

niż trzech boków są złożone, nie można z równości kątów we dwóch takich wielokątach, wnosić proporcjonalność ich boków, ani wzajemnie z proporcjonalności boków, wnosić równość kątów. I tak kwadrat prostokątny, z kwadratem ukośnym, lubo mają boki proporcjonalne, nie mają jednak kątów równych. Dwa znowu prostokąty, nie różnią się między sobą, co do kątów, a jednak boki ich mogą być nierówne i wcale nieproporcjonalne.

Trzeba iak náyiśnieý i náydokładnieý wyłożyć Ucznióm té trzy rzeczy, toiest: *Przystawanie*; *Równość* i *Podobieństwo* Figur.

*Równość* dwóch naprzykład Figur, ściągá się tylko do ich wielkości, nie zaś do ułożenia boków, albo granic w których się zańykają. I tak dwa Tróykąty, które równe podstawy mają, i wysokości są sobie równe, lubo ich boki, nie iednakowo mogą być ułożone, i większe iedne lub mnieysze od drugich. Dla tego téż można znaleźć prostokreślnéy danéy, iakáżkolwiek liczba iey boków będzie, i tychże boków ułożenie.

*Podobieństwo* ściągá się tylko do saméy Figurý czyli ułożenia boków, nie zaś do wiel.

*Wstęp do Proporcji przez przykład: 177*

wielkości. Dwie Figury, naprzykład dwa Trójkąty mogą być do siebie podobne, lubo jeden będzie nader wielki, a drugi nader mały. Lecz aby Figury były podobne, trzeba 1mo. Aby miały jednakową liczbę boków. 2do. Aby kąty w jedney Figurze były równe kątóm w drugiej. 3tio. Aby boki odpowiadające (latera correspondentia) toiest, te, które zamykają w sobie kąty równe, były proporcjonalne. I tak dwa kwadraty zawsze są podobne jeden do drugiego, chociażby naprzykład bok jednego był na miłę długi, a drugiego tylko na łokieć, lub na cal.

Przystawianie zamykają w sobie razem równość i podobieństwo. Dwie Figury aby przystać do siebie mogły; trzeba aby się w niczem nie różniły, tylko w tém, że na odmiennych miejscach są nakreślone. (r)

217. Twierdz. 6. Jeżeli dwie jakiekolwiek Figury prostokątne są podobne, i  
M w każdéy

(r) Przetrząsnąwszy Twierdzenia ściągające się do równości, i do podobieństwa Trójkątów, łatwo postrzeżemy, że dowodzenia tam przytoczone zupełnie się zasadzają na tych, któreśmy dawali mówiąc o przystawianiu Trójkątów. Wiele na tém zawisło, aby często przypominać Ucznióm sposób postępowania, który prowadzi od wyobrażeń prostiejszych, do tych, które bardziej są zawiązané.

w każdej z nich przez wierzchołki kątów równych, poprowadzimy do drugich kątów, tyle przekątnych, ile ich poprowadzić można; wszystkie te Trójkąty, na które jedną Figurę podzielimy, będą podobne Trójkątóm w drugiej Figurze.

*Przykład:* Niech będą dwa Pięciokąty  $ABCDE$ ,  $abcde$ , podobne do siebie; od wierzchołków  $A$ , i  $a$ , dwóch kątów równych, poprowadziwszy przekątne,  $AC$ ,  $AD$ ,  $ac$ ,  $ad$ ; Trójkąty,  $ABC$ ,  $ACD$ ,  $ADE$ , będą podobne Trójkątóm,  $abc$ ,  $acd$ ,  $ade$ .

*Dowód:* Ponieważ te Pięciokąty są do siebie podobne, kąty w nich  $B$  i  $b$ , będą równe, i boki około tych kątów proporcjonalne; dwa więc Trójkąty  $ABC$ ,  $abc$ , są do siebie podobne, iako mające kąty  $B$  i  $b$ , równe, i boki, około nich proporcjonalne, a w szczególności kąt  $ACB$ , równy jest kątowi  $acb$ ; a że też równe są dane kąty  $BCD$ ,  $bcd$ ; więc i kąty  $ACD$ ,  $acd$ , równe będą. Boki także  $AC$ ,  $ac$ , są między sobą iak boki  $AB$ ,  $ab$ , albo  $BC$ ,  $bc$ . A że tak boki  $AB$ ,  $ab$ , iak i boki,  $BC$ ,  $bc$ , są w proporcyi z bokami  $DC$ ,  $dc$ ; więc i boki  $AC$ ,  $ac$ , są proporcjonalne bokóm  $DC$ ,  $dc$ ; a zatem i Trójkąty  $ACD$ ,  $acd$ , będą podobne, mając kąty  $C$  i  $c$  równe, i boki około nich  $AC$ ,  $DC$ ,  $ac$ ,  $dc$ , proporcjonalne, a w szczególności kąty  $ADC$ ,  $adc$ , będą równe. A że znowu i kąty  $E$ ,  $e$ , są równe; więc i Trójkąty  $ADE$ ,

*Wstęp do Proporcji przez przykład: 179*

ADE, ade, będą względem siebie równokątne; a zatem podobne.

218. *Uwaga 1.* Dla dowiedzenia, że Trójkąty ADE, ade, są podobne, nie trzeba było używać koniecznie proporcjonalności boków AE, ae, DE, de; można nawet było i nie pokazywać wyraźnie równości kątów E, e, z samego wykreślenia; ponieważ kątów EDA, eda, EAD, ead, mogła być równość okazana, z równości już dowiedziony kątów ADC, adc, DAC, dac, CAB, cab, w innych Trójkątach: a tem samem równość kątów E, e, wydałaby się, a zatem i podobieństwo Trójkątów ADE, ade, byłoby dowiedzione.

219. *Uwaga 2.* Wielę na tem zawisło, aby to dać postrzedz Ucznióm, że gdy we dwóch Figurach podobnych złączone będą przekątnemi wierzchołki dwóch kątów odpowiadających sobie; te przekątne mieć będą iednostajné stosunki, z bokami tych dwóch Figur; a za tem gdy w podobnych Figurach końce dwóch boków odpowiadających sobie złączymy przez przekątnę; Trójkąty złożone z tych przekątnych i z dwóch boków należących do tych Figur, będą do siebie podobne.

220. *Zagadn.* 1. Mając dane trzy linie proste, na trzy pierwsze wyrazy proporcji, znaleźć linią czwartą proporcjonalną. Ma Wy-



*Wykreślenie.* Zróbmy kąt iakikolwiek. Na dwa ramiona tego kąta, przenieśmy od wierzchołka jego dwie dane linie, mające służyć za dwa pierwsze wyrazy proporcji. Końce tych dwóch linii złączmy trzecią linią. Przenieśmy ieszcze podobnym sposobem i trzecią daną linią na to ramię, na które już jest przeniesioną pierwszą linią proporcji. Od końcately trzecięj linii poprowadźmy aż do drugiego ramienia linią równoodległą od tęj, którą złączyła końce dwóch pierwszych linii. Linią zawartą między wierzchołkiem kąta i punktem, w którym ostatnią równoodległą przecina ramię drugie, będzie, czwartą linią proporcjonalną, którejśmy szukali. (s)

121. *Zagádn. 2.* Mając daną linią prostą, tak ją przeciąć, aby dwa ięj odcinki tak się do siebie stosowały, iak się stosują dwie insze dane linie

*Wykreślenie.* Od końca iednégo linii danęj do przecięcia, poprowadźmy pod iakimkolwiek kątem linią równą iednéj z tych dwóch, których dany jest stosunek,

---

(s) Co w Arytmetyce znaczy Reguła trzech, to znaczy w Geometrii Zagádnienie, aby trzy mając dane Linie proste, znaleźć czwartą proporcjonalną. Jest to w samej rzeczy Reguła trzech wykonana na liniach.

*Wstęp do Proporcji przez przykład: 181*

a od drugiego końca, w stronę przeciwną, poprowadźmy równoodległą od pierwszej, równą drugiej linii, której także dany jest sześcunek.

Złączmy końce tych dwóch linii w przeciwné strony poprowadzonych, linią trzecią, ta przetnie linią daną w punkcie, któregośmy szukali.

*Albo tak.* Od końca linii daney do przecięcia, poprowadźmy linią, która by z nią czyniła kąt iakikolwiek. Na tę drugą linią, od wierzchołka kąta, przenieśmy iedną z tych linii, których dany jest sześcunek, i od końca znowu téj ostatniey linii pociągniemy drugą linią, równą drugiej, której także dany jest sześcunek: koniec téj złączmy z końcem linii daney do przecięcia: a od tego punktu, gdzie się pierwsza kończyła, a ta druga zaczynała, poprowadźmy równoodległą, która przetnie linią daną do przecięcia w punkcie żądanym.

Ten ostatni sposób postępowania, może być przyśtołowanym i w jnych razach, gdzieby linią daną na więcej części przeciąć potrzeba, na przykład na 3. 4. 5. i t. d. które takby się miały do siebie, iak się mają 3. 4. 5. i t. d. linii danych. (t)

---

(t) Takie zagadnienie jest tém samém w Geometrii, czém jest w Arytmetyce Regula spótki.

222. *Zagádn. 3.* Przedłużyć linią daną, tak, aby summa z téj linii i z jéj przedłużenia tak się miała do samego przedłużenia, iak się mają do siebie dwie insze linie dané: czyli, znaleźć dwie linie, których daná jest różnica i stosunek.

*Wykreślenie:* Od obudwóch końców linii daney, poprowadźmy w jedną stronę dwie linie równoodległe, i równe dwóm linióm, których dany jest stosunek. Przez końce tych równoodległych, przeciągniemy linią tak daleko, aż się spotka z przedłużeniem linii daney. Punkt ten spotkania, wyznaczy długość przedłużenia linii daney; i odległość jego od dwóch końców téjże linii, będzie miarą długości dwóch linii, których szukali.

223. *Zagádn. 4.* Maiąc dany Trójkąt, i linią osobną, wystawić na téj linii Trójkąt podobny danému.

*Sposób 1.* Dwóm bokóm Trójkąta danego, i trzeciéj linii daney, szukam czwártéj proporcjonalnéj, i mieć będę dwa boki Trójkąta, którego szukam, w proporcyi z dwoma bokami Trójkąta danego. Tymże sposobem znaydę i trzeci bok Trójkąta, który má być podobny Trójkątowi danému.

*Sposób 2.* Od dwóch końców linii daney

*Wstęp do Proporcji przez przykład: 183*

néy prowadzę po iednéy stronie dwie linie czyniące z nią dwa kąty równe dwóm kątom Trójkąta danego; té dwie linie zeysciem się z sobą, zrobią z daną linią Trójkąt podobny danemu.

*Sposób 3.* Linią daną przenoszę na bok którykolwiek Trójkąta danego; tak, aby koniec ieden téj linii był na wierchołku kąta, a drugi tam, gdzie przypadnie, lub na samym boku Trójkąta, lub za nim, gdy linia daną dłuższą będzie od boku Trójkąta. Z końca tego drugiego, linii danéy prowadzę równoodległą od boku Trójkąta przeciwnego kątowni, od którego pierwszą linią ciągnąłem, i tak daleko ją prowadzę, aż się zniydzie z trzecim bokiem Trójkąta danego, przedłużonym, gdy tego będzie potrzeba. Zrobi się tym sposobem Trójkąt podobny danemu, i mający za podstawę linią równą danéy, który to Trójkąt przerysować potem mogę na samej linii danéy. (u)

224. *Zagadn. 5.* Na danéj linii wykreślić iakąkolwiek Figurę prostokręślną podobną Figurze danéy.

*Rozwiąz.* Na danéj Figurze od końca boku któregokolwiek, prowadzę ty-

le

(u). Częste tego zagadnienia używanie, było pobudką do podania kilku sposobów, któremi bydz może rozwiązane.

Ile przekątnych do innych kątów, ile można, i dzielę tak Figurę daną na Trójkąty. Potém na linii daney wykreślam po iedney stronie sposobem wyżej opisanym, tyle Trójkątów podobnych, ile ich jest w Figurze daney: Wierzchołki tych Trójkątów, będą wierzchołkami kątów Figury, którey szukałem.

225. *Uwaga.* Między innemi sposobami rozwiązania tego Zagadnienia, sposób podany zdać się náylepszym: a to dla tego, że używając go, uchybień, które popełnić można w położeniu linii, czyli boków Figury, nie zawisły iedné od drugich: i można uchybić w położeniu iedney linii, a nie uchybić tém samém, w położeniu drugiéy: na co osobliwszą baczność koniecznie mieć potrzeba.

226. *Podanie przybrane. (Lemma).* W Trójkacie prostokątnym, gdy spuścimy prostopadłą, od wierzchołka kąta prostego; ta prostopadła podzieli Trójkąt na dwa insze z pierwszym równokątne, a zatém i równokątne między sobą.

Táb. XIII. Niech będzie Trójkąt ABC prostokątny w C, skąd spuszczonea jest prostopadła CD, na przeciw prostokątnej AB; Trójkąty trzy: ABC, ACD, CBD są względem siebie równokątne.

Do-



Wstęp do Proporcji przez przykład: 183

Dowódz: Trójkąty  $ABC$ ,  $ACD$ , mają kąt spólny  $A$ , i kąty  $ACB$ ,  $ADC$  proste, a zatem równe; trzeci przeto kąt w jednym, będzie też równy trzeciemu kątowi w drugim. Są więc obadwa te Trójkąty, równokątne. Podobnie i Trójkąty prostokątne  $ABC$ ,  $CED$ , mają kąt spólny  $B$ , i są także równokątne.

W Trójkątach równokątnych  $ABC$ ,  $ACD$ , mamy proporcję:  $AB:AC=AC:AD$ . w Trójkątach:  $ABC$ ,  $CBD$  będzie,  $AB:BC=BC:BD$ ; a w Trójkątach  $ADC$ ,  $CDB$ ;  $AD:DC=DC:BD$ . w Trójkątach,  $ABC$ ,  $ACD$ , jest też i ta proporcja:  $AB:BC=AC:CD$ .

To jest 1. W Trójkącie prostokątnym, bok jeden jest średnim Geometrycznie proporcjonalnym, między przeciwprostokątną i odcinkiem mu przyległym, który czyni prostopadłą.

2. Wysokość Trójkąta prostokątnego, jest średnią Geometrycznie proporcjonalną, między dwoma odcinkami przeciwprostokątnej.

3. Przeciwprostokątna, dwa boki, i wysokość Trójkąta prostokątnego, są w proporcji.

227. Zagadn. 6. Między dwiema danymi liniami, znaleźć średnią Geometryczną.

Spó-

*Sposób 1.* Złączymy z sobą dwie dane linie, w jedną linią prostą; na niej iako na średnicy nakreślimy półkole, i od punktu złączenia tych dwóch linii, wynieśmy prostopadłą aż do okręgu półkoła. Ta prostopadła będzie średnią proporcjonalną, której szukamy.

*Sposób 2.* Na większej z dwóch danych linii, iako na średnicy nakreślimy półkole. Na tę samą średnicę, od końca iey jednego, przenieśmy drugą mniejszą linią daną, a od tego punktu, gdzie się na średnicy kończy, będzie, wynieśmy prostopadłą, aż do okręgu półkoła, i punkt zejścia się z półkołem złączmy linią z punktem tym średnicy, od którego przeniesioną była linią mniejszą daną. Ta linią łączącą te dwa punkta, będzie średnią proporcjonalną, której szukamy.

## ROZDZIAŁ IX.

*O stosunkach powierzchni Figur prostokreślnych w ogólności, a w szczególności o stosunkach Figur podobnych.*

228. *Twierdź 1.* Gdy cztery linie są w proporcji Geometryczney; prostokąt z dwóch skrajnych, równy jest prostokątowi z dwóch średnich.

To

# VIII. O stóśunkach powiérzchni Figur 187

To Twiérdzenie trzeba naprzód objaśnić na liczbach: ieżeli cztery liczby są Geometrycznie proporcjonalne, dwie skrajne rozmnożone iedną przez drugą, równe będą dwóm śrzednim podobnie rozmnożonym. W każdéy albowiem proporcyi Geometrycznéy równość zachodzi między dwoma stóśunkami Geometrycznémi, toieść: tyle razy pierwszy poprzednik zamykać w sobie powinien swégo następniaka, ile razy i drugi poprzednik zamyka także następniaka swégo. I tak naprzykład w téy proporcyi  $6:3=8:4$ , iak 6, zamyka w sobie 3, razy 2, tak i 8 zamyka 4, razy 2. Stąd wynika, że rozmnożenie skrajnych i śrzednich wyrazów proporcyi, można oznaczyć, przez trzy iednakowe liczby, a tém samém okazać równość wyrazów rozmnożonych, tak skrajnych iako i śrzednich. Naprzykład, ponieważ  $21:3=28:4$ , i równie 21, zamyka w sobie 3, iak i 28, zamyka 4, razy 7. a zatem tak  $21=7$ , razy 3, iak  $28=7$ , razy 4; więc 4 razy  $21=4 \times 7 \times 3$ ; 3 razy  $28=3 \times 7 \times 4$ . A że  $4 \times 7 \times 3=3 \times 7 \times 4$ , więc i  $4 \times 21=3 \times 28$ .

Podobnie, ponieważ  $16:12=20:15$  i tak 16 zamyka w sobie 12, iak 20, zamyka 15, razy  $1\frac{1}{3}$  albo  $\frac{4}{3}$ , a przeto tak  $16=\frac{4}{3} \times 12$ , iak i  $20=\frac{4}{3} \times 15$ ; idzie zatem, że tak  $15 \times 16=15 \times \frac{4}{3} \times 12$ ; iako i  $12 \times 20=12 \times \frac{4}{3} \times 15$ . Tak

Tak też ponieważ  $8:28=10:35$ , i  $8=\frac{2}{7}\times 28$ , a  $10=\frac{2}{7}\times 35$ ; idzie zatem, że tak jest  $35\times 8=35\times\frac{2}{7}\times 28$ ; iako też  $28\times 10=28\times\frac{2}{7}\times 35$ .

W ogólności zaś mówiąc, jeżeli jest  $a:b=c:d$ ; i tak  $a$ , zamykają w sobie  $b$ , iak, i  $c$ , zamykają  $d$  razy  $n$ ; będzie  $a=n\times b$ , i  $c=n\times d$ , a zatem tak  $d\times a=d\times n\times b$ ; iako  $b\times c=b\times n\times d$ .

Objasniwszy to twierdzenie na wielu przykładach, przystąpi Nauczyciel do następującego dowodzenia.

Tab. XIII. Niech będą dwa prostokąty: ABCD, Fig. 3. BDEF, i boki jednego, AB, BC niech będą skrajnymi tej proporcji, które boki BD, BF drugiego prostokąta są średniami, to jest niech się ma  $AB:BF=BD:BC$ , w takim razie te dwa prostokąty są równe.

*Wykreślenie.* Ustawmy tak te dwa prostokąty, aby w kątach dwóch przeciwnych przy B schodziły się, i przedłużmy boki ich DC, EF, aż do zeyscia się w punkcie G.

*Dowódz.* Prostokąty: AC, BG (w) których jednakową jest wysokość, mają się do

(w) Prostokąty zwykły się wyrażać przez dwie litery, na końcach przeciwnych dwóch kątów napisane.

IX.

5, i 8  
że tak  
 $\times 10 =$

li jest  
bie b,  
 $= n \times b$ ,  
iako

wielu  
do na-

ABCD,  
ech bę-  
y boki  
niemi,  
BC,  
równie.

prostok-  
wnych  
y boki  
kie G.

y) któ-  
ają się  
do

6 przez  
dwóch

# O stosunkach powierzchni Figur 189

do siebie, iak ich Podstawy AB, BF. Prostokąty także BE BG, iednakowey wysokości, mają się do siebie, iak ich Podstawy BD, BC. Aże z podania jest linią AB, do BF, iak linią BD : BC; więc téż i prostokąt AC tak się má do prostokątu BG, iak prostokąt BE, do prostokątu BG; czyli Prost : AC : Prost. BG = Prost. BE : Prost. BG, a zatém Prost. AC = Prost. BE, co samo krócéy tak się wyrażá.

$$AC : BG = AB : BF$$

$$BE : BG = BD : BC$$

Aże  $AB : BF = BD : BC$

więc  $AC : BG = BE : BG$ .

A zatém  $AC = BE$ .

229. Wzajemnie téż (Reciproce albo e converso) dowieśdż można, że ieżeli dwa Prostokąty są równe; wzięwszy dwa boki iednego za skrayné, a dwa boki drugiego za średnie wyrazy proporcji, znaydziemy między temi bokami proporcją.

W liczbah oczywiście się to pokazuje; bo gdyby boki dwa iednego Prostokąta wyrażone były przez liczby: 10. i 42. a boki drugiego przez 15, i 28, obadwa té prostokąty zawierałyby w sobie 420, na przykład stóp kwadratowych, to jest, byłoby,  $10 \times 42 = 15 \times 28$ , skądby wypadła ta proporcja:  $10 : 15 = 28 : 42$ .

Wy.



Wykreślenie Geometryczne do tego Twierdzenia służące, nie odmiennie było by od poprzedzającego. Dowodzenie także we środku dopiero działania różniłoby się, toieft ponieważ.

$$AC: BG=AB:BF$$

$$\text{ i } BE: BG=BD:BC$$

A przez podanie  $AC=BE$ .

$$\text{ więc } AC: BG=BE:BG$$

$$\text{ A zatem } AB: BF=BD:BC$$

230. Wnioſki 1. Ponieważ w proporcji, tenże ſám bydź może naſtępnik pierwszego ſtósunku, co i poprzednik drugiego; naprzyktád:  $8: 4=4: 2$ , albo,  $8: 4: 2$ ; przeto kwadrat ze ſrzedniej linii Geometrycznie proporcjonalnej, równa ſię teſz Proſtokątowi z dwóch linii ſkrajnych: i znowu, ieſzeli kwadrat równy ieſt proſtokątowi, bok kwadratu będzie linią ſrzednią proporcjonalną między bokami Proſtokąta.

Té podania były wytoſzone, w Rozdziałach ſzóſtym, i ósmym, lubo ſposobém odmiennym.

2. Można to ſamo przytoſować i do równoległoboków, chociaſz nie proſtokątnych, byleby kąty iednego, równe były kątóm drugiego: takſe i do Trójkątów

które.

*O stosunkach powierzchni Figur 191*

które kąt ieden spólny mają: bo jeżeli ramiona ich około tego kąta są proporcjonalne, tak, żeby można wziąć dwa ramiona iednego Trójkąta za skrajne, a dwa drugiego za średnie; té dwa Trójkąty będą sobie równe: i wzajemnie, a to stąd wynika, że takie Trójkąty, są połowami dwóch równoległoboków równokątnych, mających za boki ramiona tego kąta spólnego.

3. Przytósowanie to uczynić można, i do równoległoboków różnokątnych, biorąc zamiast boku iednego, w obudwóch, wysokość oznaczaną przez prostopadłą, spuuszczoną od końca boku iednego na bok drugi, tak dalece, że té dwa równoległoboki będą równe, gdy Podstawa i wysokość iednego będą mogły bydz wzięte za dwie linie skrajne, a podstawa i wysokość drugiego za dwie linie średnie proporcjonalne: i wzajemnie, jeżeli té cztery linie będą proporcjonalne, równoległoboki będą téż równe.

4. Jeżeli cztery linie są w proporcyi, można zawsze odmienić mieysce dwóm średnim, lub dwóm skrajnym, a nawet i dwie średnie położyć na mieyscu dwóch skrajnych, lub skrajne na mieyscu średnich, nie psując proporcyi: ponieważ przy takich odmianach, prostokąt z średnich równy iednakowo będzie prostokątowi z skrajnych.

231. *Twierdź: 2.* Gdy przez punkt iaki w kole, lub za kołem poprowadzimy dwie linie, któreby okrag koła przecinały po obudwóch stronach; prostokąt ze dwóch części iedney z tych linii zawartych między tym punktem i okręgiem koła, będzie równy Prostokątowi z dwóch części drugiey linii zamkniętych także między tym punktem, i koła okręgiem.

Táb. XIII. 1. Niech będzie w kole punkt A, przez  
Fig. 4. który przeciągnięte są cięnciwy BC; ED;  
Prostokąt, EAXAD równy iest Prostoką-  
towi, BAXAC.

*Wykreśl:* Poprowadźmy linie, BD, EC.

*Dowódz:* Trójkąty BAD, EAC, są do siebie podobne; kąty ich albowiem w wierzchołku A przeciwne, są równe, i kąty B, E, (189) równe, iako obeymujące ramionami swemi tenże sam łuk CD. Będą więc boki tych Trójkątów proporcjonalne; i  $AB:AE=AD:AC$ . a zatem  $AB \times AC = AE \times AD$ .

Táb. XIII. 2. Niech będzie punkt A, za kołem, od  
Fig. 5. tego punktu ciągniemy dwie Linie AB, AE, przecinające okrag koła, iedna w B, i C, a druga w E i D. Prostokąty  $AB \times AC$ , i  $AE \times AD$ , będą równe.

*Wykreśl:* Poprowadźmy linie BD, EC.

*Dowódz.*

### O stóśunkach powiérzchni Figur 193

Dowodz: Tróykąty, BAD, EAC, mają kąt A, spólny i kąty B, i E równe, bo wsparte ramionami na tym samym łuku CD; więc té Tróykąty mają boki proporcjonalné; i  $AB:AE=AD:AC$ , a zatém,  $AB \times AC = AE \times AD$ .

To Twierdzenie zwykło się iefzcze i tak wyrażać.

1. Jeżeli dwie ciénciwy przecinaią się w kole, części ich będą odwrotnie (inverse, albo, in ratione inversa) proporcjonalné, toiest, tak się będzie miała część iednéy ciénciwy, do części ciénciwy drugiéy; iak się má drugá część ciénciwy drugiéy, do drugiéy części ciénciwy piérwzéy.

Dwie tedy części ciénciwy iednéy, będą śrzedniemi proporcyi, a dwie części ciénciwy drugiéy będą skraynémi téżé proporcyi.

2. Gdy dwie linie przecinające koło, wychodzą od iednégo punktu za kołém; są odwrotnie proporcjonalné z częściami temi, które za koło wychodzą, toiest, tak się má iedna przecinająca do drugiéy, iak się má część drugiéy za kołém, do części piérwzéy także za kołém: iedna tedy przecinająca, i część iey za kołém są śrzedniemi w proporcyi, a druga przecinająca, i część iey także za kołém, są skraynémi téy saméy proporcyi.

232. *Uwaga. W pierwszym razie.* Gdy jedna z cięciw jest średnicą koła, a drugą do niej prostopadłą; ta prostopadła na dwie równe części będzie od średnicy podzieloną, i Prostokąt z dwóch części średnicy, będzie równy kwadratowi z połowy drugiey cięciwy. Prostopadła tedy spuszczone od któregokolwiek punktu koła, na średnicę, jest średnią Geometrycznie proporcjonalną między dwiema częściami średnicy: który to przypadek szczególny, i wyżey już jest dowiedziony.

*W drugim razie.* Gdy jedna z linii zamiast coby miała przecinać koło, jest styczną (tangens) jego, można ją uważać iak przecinającą koło, ale tak, że część ięy w kole niknie dla małości, i dwa ięy punkta przecięcia schodzą się w punkt ieden.

W tym razie Prostokąt ieden, odmiennia się na kwadrat z styczney. I stąd wynika to wielkiey wagi podanie: że jeżeli od iednego punktu, wychodzą dwie linie, jedna przecinającą koło, a drugą styczną z kołem, kwadrat z styczney równać się będzie Prostokątowi z całej linii przecinającej, i z części ięy za kołem: toiest, że styczną jest średnią Geometryczną między całą przecinającą, i częścią ięy za kołem. Następujące, dowodzenie jest ieszcze iasnieysze, i bardzoż pod oczy podpadające. Niech



Niech będzie AD, styczná, AB zaś Tab. XIII.  
przecinaiącą koło, i od tegoż samego Fig. 6.  
punktu A poprowadzoná. Ta styczná AD  
jest średnią Geometryczną między prze-  
cinaiącą AB, i iey częścią, AC, za kołem.

*Wykreśl.* Od punktu dotknięcia D, po-  
prowadźmy dwie linie: DB, DC.

*Dowodź.* Trójkąty: ABD, ADC, są  
do siebie podobné: mają albowiém spól-  
ny kąt A, i kąt odcinka, ADC, równy ką-  
towi w odcinku na przemian ABD (195)  
a zatém i trzeci kąt w jednym Trójką-  
cie równy jest kątowi trzeciemu w dru-  
gim: będą więc tych Trójkątów boki  
proporcjonalné, i  $AB:AD=AD:AC$ , to-  
jest, kwadrat z styczney AD, równy bę-  
dzie Prostokątowi z AB przez AC.

233. W szczególności zaś niech będzie Tab. XIII.  
styczná AT, i przecinaiącą AD, od tegoż Fig. 7.  
samego punktu A poprowadzoná, przez  
środek C, koła.

Pociągniemy promień CT do punktu  
dotknięcia T: kwadrat z linii AC, równy  
będzie summie kwadratów z AT, i CT,  
toiest, równy będzie summie z Prostoka-  
ta AD przez AB, i z kwadratu BC. Skąd  
wynika ten wniosek, że jeżeli średnicę  
BD, podzielimy na dwie równe części  
w punkcie C, i potem na iey przedłuże-  
niu, weźmiemy jakikolwiek punkt na  
Na przy-

przykład A; Prostokąt z całej téy linii i z iéy przedłużenia ( $AD \times AB$ ) z przydany kwadratem, z połowy średnicy ( $BC^2$ ) równać się będzie kwadratowi i linii złożonéy z połowy średnicy, i z iéy przedłużenia ( $AC^2$ ) toiest będzie  $AD \times AB + BC^2 = AC^2$ .

234. Zagád: 1. Maiąc dany Prostokąt, i kwadrat, znaleźć dwie linie, któreby tak się miały do siebie, iak się mają, tén Prostokąt i kwadrat.

Rozwiąqz: Zamieńmy Prostokąt dany na inszy iému równy, któryby za bok iedén, miał bok kwadratu: czyli (co na iedno wychodzi) szukáymy czwártéy linii proporcjonalnéy do boku kwadratu, i do dwóch boków Prostokąta. Bok kwadratu, tak się mieć będzie do téy czwártéy proporcjonalnéy, iak się má kwadrat do Prostokąta.

To postępowanie zgádza się zupełnié z tém, co się iuż powiedziało w Arytmetyce (na karcie 89. i 90.) a co tu przez różne przykłady, podobné następującemu objaśnić ieszcze należy.

Wziąwszy bok kwadratu za spólną miarę, albo za iedność, niechby bok iedén Prostokąta, zawierát w sobie 5. razy bok kwadratu, a drugi 7. razy. Czwártá liniá proporcjonalná do boku tego

*O stosunkach powierzchni Figur 197*

tego kwadratu, i do dwóch boków Prostokąta, zawierałaby w sobie 35. razy bok kwadratu, tak, iako i cały Prostokąt, zawierałby w sobie 35. razy cały kwadrat.

235. Przystósowanie. Podobnym sposobem postąpimy sobie chcąc znaleźć dwie linie, któreby tak się miały do siebie, iak się mają dwa Prostokąty, toiest, szukać będziemy czwartej proporcjonalnej do boku iednego Prostokąta, i dwóch boków drugiego: do tej albowiem czwartej proporcjonalnej tak się mieć będzie drugi bok pierwszego Prostokąta, iak się mają powierzchnie tychże Prostokątów.

Możnaby to samo wykonać, szukając sposobem wyżej wyrażonym (234) stosunku każdego z dwóch Prostokąta, do tegoż samego kwadratu, znaleźlibyśmy albowiem, że powierzchnie tych dwóch Prostokątów tak się mają do siebie, iak się mają dwie czwarte proporcjonalne do boku kwadratu, i dwóch boków każdego z osobna Prostokąta.

Niechbyśmy naprzykład znaleźli, że Prostokąt ieden, który nazywam P. zawiera w sobie kwadrat K, tyle razy, ile razy linią L, zawiera w sobie bok B, kwadratu, toiest, że  $P:K=L:B$ .

Niech-

Niechbyśmy znowu znaleźli, że drugi Prostokąt Q, zawiera w sobie ten sam kwadrat K, tyle razy, ile razy linią M, zawiera w sobie bok B tegoż kwadratu, toiest, że  $Q:K=M:B$ . Wnoszę stąd, że Prostokąty P, Q, tyle razy zawierać będą jeden drugi, ile razy się zawierają linie L, M. jedna w drugiej, toiest, że będzie,  $P:Q=L:M$ .

Jakoż jeżeli prostokąt P, zawiera w sobie kwadrat K, dwa, trzy, cztery, i t. d. razy, a prostokąt Q, zawiera na przykład  $\sigma$ . razy kwadrat K: Prostokąt Pierwszy, będzie do Prostokąta drugiego, iak są liczby, 2, 3, 4, i t. d. do liczby  $\sigma$ . A że też i linią L, zawiera w sobie bok, B. 2, 3, 4, i t. d. razy; więc też i linią M zawierać będzie bok B, razy  $\sigma$ . a zatem tak się ma Prostokąt P, do Prostokąta Q, iak linią L, do linii M.

Jeżeli tedy mamy dwie proporcye np.

$$P:K=L:B.$$

$$Q:K=M:B.$$

W których jednakowe są następniiki; poprzedniiki pierwsze obudwóch proporcyy tak się do siebie będą miały, iak poprzedniiki drugie tychże proporcyy, toiest,  $P:Q=L:M$ .

236. Uwaga. W jedney z dwóch dopiero wyrażonych proporcyy, na przykład w dru-

O stósunkach powierzchni Figur 199

w drugiéy, można było odmienić mieyscé poprzednikóm, i następnikóm, i té samé proporcye tak wyrazić?

$$P: K=L:B.$$

$$K: Q=B:M.$$

Skąd wynika  $P: Q=L:M$ .

237. *Defin.* Gdy będą trzy iakiékolwiek ilości iednakowego gatunku stósunek pierwszéy z nich, do trzeciéy nazywá się stósunkiem składanym (*ratio composita*) z stósunku pierwszéy ilości, do drugiéy, i drugiéy do trzeciéy. J tak stósunek  $P$  do  $Q$ , nazywá się składanym z stósunku  $P$  do  $K$ , i  $K$  do  $Q$ ; Tak téż stósunek  $L$  do  $M$  będzie składanym z stósunku  $L$  do  $B$ , i  $B$  do  $M$ . Takie stósunki złożone z stósunków równych są równé. I tak ponieważ stósunek  $P$  do  $K$ , i  $K$  do  $Q$  równy iest pierwszy stósunkowi  $L$  do  $B$ , drugi stósunkowi  $B$  do  $M$ ; będzie téż i stósunek składany  $P$  do  $Q$  równy stósunkowi składanemu  $L$  do  $M$ .

238. *Przyst.* 1. To, co się tu powiedziało o stósunku składanym, dobrze będzie przytósować do reguły trzech składanéy, o którém mówiło się w Arytmetyce.

*Przykład:* Rzemieślnicy z jednakową pilnością pracujący około iakiéy roboty, tym więcéy iéy robią, im więkšzą będzie ich liczba, i czas dłuższy strawiony

na



na téżę robocie. Przeto gdy porównać chcemy dwie jednakowego gatunku roboty, któremi się dwie kupy Rzemieślników zatrudniają, trzeba rozmnożyć (iako się to już w Arytmetyce wyłożyło) liczby Rzemieślników przez liczby dni, przez które pracowali; a roboty przez tych Rzemieślników wygotowane, tak się będą do siebie miały, iak się mają tamté dwie liczby rozmnożone.

Niechby naprzykład liczby Rzemieślników były do siebie, iak 2. do 3; a czasy przez które robili iak 5. do 7. Pierwszy stósunek 2. do 3. równa się stósunkowi tychże liczb przez tę samą liczbę 5. rozmnożonych, i będzie, iak 10. do 15. Drugi stósunek 5. do 7. równa się stósunkowi tychże liczb przez tę samą liczbę 3. rozmnożonych, i będzie iak 15. do 21. A zatem stósunek robót, który się równa stósunkowi 10. do 21, równy będzie stósunkowi składnému z stósunku 10. do 15, i 15. do 21; z których pierwszy równy jest stósunkowi 2. do 3, a drugi równy stósunkowi 5. do 7.

Podobnie rozumować można, gdy więcej niż dwa będzie stósunków.

239. Przystoi: 2. Wszystkie także działania o zamianach, i inne podobne, któremi zatrudnialiśmy się w Arytmetyce, zasadały się na stósunkach złożonych z dwóch

## O stósunkach powierzchni Figur 201

z dwóch lub więcej stósunków równych: iako to bardzo łatwo w przykładach okazać można.

240. Przysto: 3. Samé nawet niektóre działania, które zda się bydy tylko zwyczajnem mnożeniem, można podciągnąć pod stósunek składany.

Przykład 1. 15. Czerwonych złotych ileż czyni groszy Polskich?

Aby znaleźć wartość 15. czerwonych złotych w groszach, zwyczajnie obracają się czerwone złote na złote, a te potem na grosze. Rozwiążemy teraz to zadanie, rozkładając je na stósunki pojedyncze, i szukając stósunku z nich złożonego, a to dla pokazania, że czasem i nie myśląc o tém, używamy w samęj rzeczy stósunku składanego.

Stósunek wartości 15. czerw. do wartości w groszach, składa się z stósunków następujących:

1. Wartość 15. czerw. zł: do wartości 1. czerw. zł: iest, iak 15. do 1.

2. Wartość 1. czerw. zł: do wartości 1. złotego iak 18. do 1.

3. Wartość 1. złotego do wartości 1. grosza iak 30. do 1.

4. Stósunek z tych trzech złożony iest iak 810 do 1.

Więc

Więc 15. czerwonych złotych czyni groszy - - - 8 100.

*Przykład 2.* Osoba 30. lat mająca, ileż minut żyła, rachując w Roku dni 365?

Stósunek 30. lat do iednej minuty składa się z stósunków następujących:

Z Stósunku 30 lat do 1. roku, toiest,  
- - - - - 30 do 1

Z Stósunku 1. roku do 1. dnia, toiest;  
- - - - - 365 do 1,

Z Stósunku 1. dnia do 1. godziny, toiest, - - - - - 24 do 1,

Z Stósunku 1. godziny do 1. minuty, toiest, - - - - - 60. do 1,

Stósunek z tych wszystkich złożony iest - - - - - 15768000. do 1.

A zatem w 30 latach iest minut - - - - - 15768000.

241. *Przyśłós. 4.* Widzieliśmy wyżej że dla znalezienia stósunku dwóch Prostokątów, trzeba było ieden z nich zamienić na inszy, któryby miał bok równy bokowi w drugim Prostokącie, albo (co na iedno wychodzi) trzeba było znaleźć czwartą linią proporcjonalną do iednego boku iednego Prostokąta, i dwóch boków drugiego: i że tak się má pierwszy Prostokąt do drugiego, iak się má drugi bok pierwszego

czyń

aż, ileż  
ni 365?minuty  
cych:, toiest,  
do 1, toiest;  
do 1,

do 1,

do 1,

do 1.

ooo.?

wyżey  
Prosto-  
amienić  
bokowi  
na jedno  
czwartą  
boku ie-  
ów dru-  
prostokąt  
ok pier-  
szęgo

## O stósunkach powierzchni Figur 203

wfzégó prostokąta, dę téy czwártéy linii proporcjonalnéy. Zwyczajnie to podanie tak się wyrażá: że *stósunek dwóch Prostokątów składa się z stósunków ich boków*. Co tak okazać można.

Niech będą dwa boki iednégo Prostokąta nazwane, A i B, a dwa boki drugiégo prostokąta, C i D. Szukáymy czwártéy linii proporcjonalnéy trzem bokóm B, C, D, i ta niech będzie L, toiest niech będzie,  $B:C=D:L$ , stósunek linii A, toiest, drugiégo boku pierwszégó prostokąta, do L, równy będzie stósunkowi pierwszégó prostokąta, do drugiégo (235.) A że stósunek A do L składa się z stósunków, A do D, i D do L; stósunek zaś A do D, iest stósunkiem boku iednégo, iednégo Prostokąta do boku drugiégo, drugiégo Prostokąta, a stósunek D do L, równa się stósunkowi drugich dwóch boków B i C (bo było,  $B:C=D:L$ .) więc *stósunek dwóch Prostokątów, składa się z stósunków ich boków*.

242. Przyśt. 5. Gdy dwa Prostokąty, które z sobą porównywać mamy, są kwadratami; ponieważ boki kwadratu są wszystkie równe; kwadrat iedén tak się mieć będzie do kwadratu drugiego, iak się má bok iedén pierwszégó kwadratu do trzeciego linii proporcjonalnéy z tym bokiem, i z bokiem drugiego kwadratu. Niech na przykład A i B, będą boki tych dwóch kwa-

kwadratów, a C, niech będzie linią trzecią proporcjonalną do tych boków, kwadrat pierwszy tak się mieć będzie do kwadratu drugiego, iak się ma A do C.

243. *Defin.* Tén stosunek A do C, składa się z stosunku A do B, i B do C. Jako zaś te dwa ostatnie stosunki są równe: bo kładliśmy A do B, iak B do C, albo  $A : B :: B : C$ , tak stosunek z nich złożony, nazywá się *dwumnożnym*, (*Ratio duplicata*), że wykładnik jego, iest kwadratem iednego z wykładników, dwóch pierwszych stosunków.

Niechby boki dwóch kwadratów miały się do siebie, iak 1 do 2; Powierzchnie tych kwadratów będą do siebie w tym samym stosunku, w którym iest 1. do 4; trzecią też linią proporcjonalną do 1. i 2, iest 4: a zatem te dwa kwadraty tak się do siebie mieć będą, iak się ma bok iednego z nich do trzeciej linii proporcjonalnej.

Jeżeli boki dwóch kwadratów będą do siebie, iak 2, do 3, powierzchnie ich będą, iak 4, do 9; trzecią też linią proporcjonalną do 2 i 3, iest:  $\frac{6}{2}$  a stosunek 2 do  $\frac{6}{2}$  iest tén sam, co i stosunek 4 do 9.

Jako stosunek pierwszy naprzykład linii do trzeciej *ciągło* (*continue*) proporcjonal-



*O stóśunkach powiérzchni Figur 205*

nalnéy, nazywają się stóśunkiem dwumno-  
żnym stóśunku piérwszey linii do drugiéy;  
tak znówu stóśunek piérwszey téy linii do  
drugiéy, nazwać można stóśunkiem dwu-  
dzielnym (ratio subduplicata) stóśunku  
linii piérwszey do trzeciéy. J tak gdy  
trzy linie przez liczby oznaczone: 1, 2, 4,  
są ciągiem proporcjonalné, toieśt, 1 do 2,  
iак 2 do 4: albo 1: 2; 4. Ponieważ piér-  
wszą do trzeciéy, toieśt, 1 do 4 ieśt w stó-  
śunku dwumnożnym piérwszey do dru-  
giéy, toieśt iак  $1^2$  do  $2^2$ ; będzie znówu 1.  
do 2: w stóśunku dwudzielnym 1, do 4, to-  
ieśt, iак  $\sqrt{1}$  do  $\sqrt{4}$ .

244. Zagádn: 2. Maiąc dany kwadrat  
iedén, znaleźć drugi, któryby do piér-  
wszego był w danym stóśunku.

Rozwiąz: Danému stóśunkowi znáy-  
dźmy inszy równy, mający za poprzedni-  
ka bok kwadrata danego. Między tym po-  
przednikiem, i następnikiem iego, szukáy-  
my śródniéy proporcjonalnéy, ta będzie  
bokiém kwadratu żadanego.

Albo tak: Złączmy wpróśt z sobą dwie  
linie, mającé do siebie téń sáń stóśunek,  
który mają dwa wyrazy, naprzykład  
dwie liczby dané. Na téy linii ze dwóch zło-  
żonéy, iako na śródnicy, nakreślmy półko-  
le, i od punktu ich łączenia się wynieśmy  
prostopadłą, aż do okręgu. Od punktu zey-  
ścia się prostopadłéy z okręgiém popro-  
wadź-

wadźmy dwie linie do dwóch końców średnicy; kwadraty tych dwóch linii mieć będą do siebie stosunek; a zatem jeżeli jedna z nich równa jest bokowi kwadratu danego; równa będzie bokowi kwadratu, którego szukamy. Jeżeli zaś pierwszą nie równa jest bokowi kwadratu danego; to trzeba na niej, zacząwszy od punktu jej przecięcia z okręgiem, wyznaczyć linią równą bokowi kwadratu danego i od punktu naznaczonego prowadzić równoodległą od średnicy, a tą równoodległą przecnie drugą linią w tym punkcie, który wyznaczy długość linii kwadratu szukanego.

To Zagadnienie przytósować należy do przykładów Arytmetycznych.

*Przykład: 1.* Znaleźć kwadrat, któryby był  $\frac{3}{5}$  kwadratu danego, to jest, któryby tak się miał do niego, jak 3, do 5.

Bok kwadratu danego dzieli na dwie części, któreby tak się miały do siebie jak 2 do 3. Na tymże boku, jak na średnicy kreślę półkoło, a od punktu podziału wynoszę prostopadłą aż do jej spotkania się z okręgiem. Od tego punktu spotkania prowadzę linią do końca średnicy, w tę stronę, gdzie część jej większą znajduje się. Ta linią będzie bokiem kwadratu szukanego.

Przy-

*O stosunkach powierzchni Figur 207*

*Przykład: 2.* Mając dany kwadrat do-  
brać mu drugi, któryby tak się miał do  
niego, jak 5, do 3.

Liniją równą bokowi danego kwadra-  
tu przeciągniemy dalej, aż takich 5. części  
zamykać w sobie będzie, iakich 3 nie prze-  
ciągnioną zamykała.

Na téżę linii tak przeciągnionéy, iak  
na średnicy nakreśliśmy półkole, i od pun-  
ktu, od którego jest przedłużoną, wynie-  
śmy prostopadłą aż do okręgu, i od tego  
punktu, gdzie go spotyka, poprowadźmy  
liniją do końca tego średnicy, gdzie część  
ięj równa się bokowi danego kwadratu.  
Ta ostatnia linija będzie wymiarem boku  
kwadratu, którego szukamy.

*245. Uwaga.* Rozwiązanie Arytmety-  
czne takowych zagadnień zasada się na  
wyciągnięciu pierwiastku kwadratowego.

Gdy na przykład znaleźć potrzeba kwa-  
drat, któryby był  $\frac{3}{5}$  kwadratu danego,  
to jest, któryby tak się miał do niego  
jak 3 do 5; rozmnożywszy obiedwie te  
liczby przez 5, będzie 3 do 5, iak 15 do  
25; więc kwadrat, którego szukamy tak  
się mieć będzie do kwadratu danego, iak  
15. do 25; a zatem bok kwadratu, którego  
szukamy, będzie do boku kwadratu dané-  
go, iak jest liczba, którą przez siebie  
rozmnożoną czyni 15, do liczby, którą  
przez

przez siebie rozmnożoną czyni 25: to jest, iak pierwiástek kwadratowy z 15. do 5. Trzeba tedy wyciągnąć pierwiástek kwadratowy z 15, i ten pokaże wielkość boku kwadratu szukanego, to jest trzeba znaleźć średnią liczbę proporcjonalną między dwiema danými, 3 i 5: rozmnożywszy iedną przez drugą, i z rozmnożonej liczby 15, pierwiástek kwadratowy wyciągnąwszy.

Działanie więc Geometryczne zmierzające do znalezienia średniej linii proporcjonalnej między dwiema danými, iest to samo, co w Arytmetyce wyciąganie pierwiástku kwadratowego z liczby danej: co można i tém potwierdzić, że kwadrat liczby średniej Geometrycznie proporcjonalnej między dwiema inszemi, równa się tymże dwóm liczbóm przez siebie rozmnożonym: a zatem ta średnia liczba znáydzie się, wyciągając pierwiástek kwadratowy z tych dwóch liczb, iednej przez drugą rozmnożonych.

Gdyśmy wyżey Geometrycznie szukali kwadratu, któryby miał się do kwadratu danego w danym stósunku: szukaliśmy przez wykreślenie, średniej linii Geometrycznie proporcjonalnej między dwiema w danym stósunku będącemi, i ta średnia linią była bokiém kwadratu szukanego.

## O stósunkach powierzchni Figur. 209

246. Przytósować z łatwością można Podania dopiero wyłożone do inszych iakichkolwiek figur prostokreślnych, i do siebie podobnych. Pokáže się to naprzód na Prostokątach podobnych, potem na Trójkątach, naostatek w ogólności na iakichkolwiek figurach prostokreślnych.

Gdy będą dwa Prostokąty podobne, i na ich dwóch bokach odpowiadających sobie, zrobimy dwa kwadraty; té dwa Prostokąty, tak siebie mieć będą, iak té dwa kwadraty.

Niech będą dwa prostokąty podobne, Tab. XIV. *Fig. 1.*  
 $ABCD$ ,  $abcd$ ; ich powierzchnie, tak się do siebie mieć będą, iak się mają powierzchnie kwadratów  $ABEF$ ,  $abef$ , zrobione na bokach odpowiadających sobie;  $AB$ ,  $ab$ . Jakoż Prostokąt  $ABCD$ , tak się má do kwadratu  $ABEF$ , iak wysokość  $AD$  do wysokości  $AF=AB$ , toiest.

$ABCD: ABEF = AD: AB$ ,  
 Podobnie  $a b c d: abef. = ad: ab$ .

Aże dla podobieństwa prostokątów, iest téż  $AD: AB = ad: ab$ , więc

$ABCD: ABEF = abcd: abef$ .  
 albo  $ABCD: a b c d = ABEF: abef$ .

To samo ieszcze wyłożyć można sposobem następującym:

O Niech



Tab. XIV.  
Fig. 2.

Niech dwie podstawy dwóch Prostokątów podobnych będą do siebie jak 5 do 3; wysokości ich będą też w takowym stosunku 5 do 3: a zatem jeżeli podzielimy jedną podstawę na 5, a drugą na 3, również części, wysokość także, jedną na 5 części równych, a drugą na 3 równe pierwszym; powierzchnie tych dwóch Prostokątów będą mogły być podzielone, pierwsza na 25, a druga na 9 części równych w obu dwóch Prostokątach; tak iak też i kwadraty na tych samych podstawach zrobione mogłyby być podzielone, jeden na 25, a drugi na 9. równych kwadracików: Stąd wypływa, że i Trójkąty prostokątne podobne, tak się mają do siebie, iak kwadraty ich boków odpowiadających sobie: bo takie Trójkąty są w samej rzeczy podobne prostokątów podobnych, i mających też taką samą, co one, podstawę i wysokość.

247. Można jeszcze przystosować to samo i do iakichkolwiek Trójkątów podobnych: ponieważ albowiem w podobnych Trójkątach, wysokości są między sobą, iak Podstawy; zatem prostokąty, któreby miały tey wielkości podstawy i wysokości, co i Trójkąty, byłyby podobne i miałyby się do siebie w stosunku dwumnożnym ich boków, albo iak kwadraty ich boków odpowiadających sobie (246); więc i Trójkąty, iako podobne tychże prostokątów, będą do siebie w sto-

## O stosunkach powierzchni Figur 211

w stosunku także dwumnożnym ich boków.

Jaśniej to wyłożyć można, gdy stosunki boków wyrażone będą przez liczby.

Niech będzie Trójkąt iakikolwiek, Táb. XIV. którego podwoiliśmy wszystkie trzy boki. Fig. 3. Ten drugi Trójkąt zmieści w sobie 4 Trójkąty, z których każdy przyftanie do pierwszego.

Jeżeli w tymże pierwszym Trójkącie bok każdy potroimy; ten drugi Trójkąt zamknie w sobie 9. Trójkątów, z których każdy przyftanie do pierwszego.

Jeżeli znowu każdy bok w pierwszym Trójkącie tak przedłużymy, żeby dłuższy był 4, 5, 6, i t. d. razy; ten drugi Trójkąt pomieści w sobie, 16, 25, 36, i t. d. Trójkątów, mogących przyftać do pierwszego.

Przeto, jeżeli boki Trójkąta iednego zawierają w sobie 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, razy boki innego Trójkąta; powierzchnia pierwszego Trójkąta zawierać będzie powierzchnią drugiego, 1, 4, 9, 25, 36, 49, 64, 72, 81, ... razy.

Podobnie, powierzchnie kwadratów, których boki zawierają 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ... razy bok innego kwadratu, będą

zawierać powierzchnią tego drugiego kwadratu, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 72, 81. — i t. d.

Gdyby boki dwóch Trójkątów podobnych miały się na przykład do siebie, iak 5, do 7; możnaby w pierwszym Trójkącie umieścić 25, a w drugim, 49 równych Trójkątów, których wszystkie boki przyślałyby mogły do siebie; a zatem powierzchnie tych dwóch Trójkątów miałyby się do siebie, iak 25, do 49, toiest, iak powierzchnie dwóch kwadratów, których boki byłyby do siebie iak 5, do 7.

Nakoniec, można tego samego dowieść sposobem podobnym, iakośmy dowodzili, że kwadraty mają się do siebie w stosunku dwumnożnym ich boków, (242)

I tak, gdy będą dwa iakiękołwiek Trójkąty podobne, do których dwóch boków odpowiadających sobie, znaydujemy trzecią linią, ciągię proporcjonalną; powierzchnia jednego Trójkąta, tak się mieć będzie do powierzchni drugiego, iak bok pierwszego Trójkąta, który wzięty iest za pierwszy wyraż proporcyi, do téj trzeciej linii proporcjonalnej.

Táb. XIV. Niech będą dwa Trójkąty podobne,  
Fig. 4. ABC, abc, znaydźmy AD trzecią ciągię proporcjonalną do boków AB, ab; i tę samę

y podo-  
bie, iak  
ykanie  
ównych  
a boki  
tem po-  
w mia-  
toiest,  
v któ-  
do 7.

go do-  
my do-  
o siebie  
oków,

k Tróy-  
boków  
y trze-  
wierz-  
ieć bę-  
ak bok  
ety iest  
do téy

dobne,  
ciągló  
b; i té  
same

# O stósunkach powierzchni Figur 213

samę AD przenieśmy na linię AB od A do D. Powierzchnia Tróykąta ABC, będzie do powierzchni Tróykąta abc, iak AB do AD.

**Wykreślenie.** Poprowadźmy linią CD. Ponieważ dla popobieństwa Tróykątów iest AB:  $ab=AC$ : ac, a przez wykreślenie AB:  $ab=ab$ ; AD, będzie więc; AC:  $ac=ab$ ; AD: a zatem Tróykąta b, CAD, mają kąty A i a równe; i ramiona około tych kątów na odwrót proporcjonalne: będą tedy te dwa Tróykąty równe co do powierzchni, a przeto stósunek Tróykąta ABC, do każdego z nich będzie iednakowy. A że stósunek tegóż Tróykąta ABC, do Tróykąta ADC, równy iest stósunкови linii AB, do linii AD; więc téż i Tróykąta ABC tak się mieć będzie do Tróykąta abc, iak linią AB do linii AD, toiest, w stóunku dwumnożnym boków AB, ab.

Idzie stąd, że i równoległoboki podobne są także między sobą w stóunku dwumnożnym ich boków: ponieważ takie równoległoboki dwa razy w sobie zamykają Tróykąty podobne.

248. Można także, było równie dokładnie dowieść, że Tróykąty podobne ABC, abc, są między sobą w stóunku dwumnożnym ich boków AC, ac: a zatem, że stóunek dwumnożny AB do ab, równy iest stó-

Stosunkowi dwumnożnemu AC, do ac, to jest, że stosunki dwumnożne z równych stosunków, są równe: co też już się ogólnie pokazało, mówiąc wyżej o stosunkach składanych z jnszych stosunków.

Jakoż niech będą trzy jakiekolwiek ilości ciągiło proporcjonalne, A, B, C, i drugie trzy ciągiło także proporcjonalne, a, b, c, i w równym z pierwszemi stosunku. Stosunek składany A do C, równy będzie stosunkowi, składanemu a do c, to jest,  $A:C=a:c$ .

Bo ponieważ stosunek A do B równy wzięliśmy stosunkowi a do b, będzie,

$$A:B=a:b; \text{ A że } A:B=B:C \\ \text{ i } a:b=b:c$$

Więc  $B:C=b:c$

a zatem  $A:C=a:c$

W liczbach to samo iasniey się okaże.

Niech będą trzy liczby ciągiło proporcjonalne 8, 4, 2, i drugie trzy ciągiło także i równie proporcjonalne, 12, 6, 3, będzie,  $8:2=12:3$ .

Ponie-



# IX. O stosunkach powierzchni Figur 213

Ponieważ albo wiem równe są stosunki  
8 do 4, i 12. do 6, będzie.

$$8:4=12:6; \text{ A że, } 8:4=4:2 \\ \text{ i } 12:6=6:3.$$

Więc  $4:2=6:3$

A zatem  $8:2=12:3$ .

249 Podanie przybrane. Gdy mamy  
jakikolwiek zbiór stosunków równych,  
których wyrazy wszystkie jednakowego  
są gatunku; summa wszystkich poprze-  
dników, tak się mieć będzie do sum-  
my wszystkich następników, iak każdy  
w szczególności poprzednik, do swego  
następnika.

Bo jeżeli każdy z osobna poprzednik  
dwa, trzy, cztery i t. d. razy, zamykają  
w sobie swojego następnika; wszystkie  
też razem poprzedniki zamykać będą  
wszystkie razem następniki dwa, trzy,  
cztery i t. d. razy: a zatem summa  
wszystkich poprzedników, tyle razy za-  
mykać będzie summę następników, ile  
każdy z osobna poprzednik, swego na-  
stępnika.

I tak niech będą równe stosunki, 64  
do 32. 50 do 25. 42 do 21. 30 do 15.  
24 do 12. 18 do 9. 10 do 5. 8. do 4.  
6 do 3. 4 do 2. 2 do 1. Summa wszyst-  
kich

kich poprzedników  $\equiv 258$ , a summa wszystkich następników  $\equiv 129$ ; będzie tedy,  $258:129 \equiv 64:32$  albo  $\equiv 56:28$ ; albo  $\equiv 42:21$  i t. d.

250. *Twierdzenie 3.* Jakieżkolwiek są Figury prostokreślne podobne, zawsze té do siebie będą w stósunku dwumnożnym boków odpowiadających sobie.

Tab. XIV. *Wykreśl:* Od wierzchołków dwóch kątów odpowiadających w obydwóch figurach, poprowadźmy przekątne do innych kątów, do których mogą być poprowadzone.

*Dowodzenie.* Dwie té figury będą podzielone na Trójkąty, które z osobna brane w jedney figurze, będą podobne Trójkątom odpowiadającym w drugiej figurze. Każdy zaś w szczególności Trójkąt w jedney figurze, będzie do Trójkąta odpowiadającego sobie w drugiej figurze w stósunku dwumnożnym boków odpowiadających; wszystkie tedy Trójkąty, z których się składa jedna figura, będą poprzednikami, a wszystkie trójkąty pierwszym odpowiadające, z których się składa druga figura, będą następnikami tamtych; a zatem summa wszystkich Trójkątów, które składają jednę figurę, toiest (ta cała figura) tak się mieć będą do summy wszystkich Trójkątów, z których się składa druga figura (toiest

umma  
będzie  
o: 25;

iek są  
awsze  
umno-  
bie.

ch ką-  
figu-  
to in-  
bydź

ą po-  
sobna  
dobne  
ugięć  
Tró-  
y ką-  
y fi-  
ków  
Tró-  
gura,  
tró-  
któ-  
na-  
mma  
a ie-  
się  
y ką-  
gura  
fi

### O stósunkach powierzchni Figur 217

(toiest do téy drugiéy całej figury), iak się má każdy w szczególności Tróykąt w jednéy figurze, do Tróykąta odpowiadającego w drugiéy figurze, toiest, w stósunku dwumnożnym boków odpowiadających w tych dwóch figurach.

Wszystko zatem, cokolwiek się powiedziało o stósunku dwóch kwadratów i o sposobie znalezienia kwadratów, któreby się miały do siebie w danym stósunku, może bydź przystósowane do iakichkolwiek figur prostokréślnych podobnych.

251. Aby Figurę iaką prostokréślną zrobić podobną i równą danym dwóm innym podobnym figuróm prostokréślnym; trzeba tym końcem postawić Tróykąt prostokątny, dawszy mu za ramiona dwa boki odpowiadające sobie w dwóch figurach danych podobnych, a przeciwprostokątną tego Tróykąta, będzie bokiém odpowiadającym w figurze, której szukamy.

252: Gdy cztery linie skłádają proporcya, i na dwóch pierwszych, wyrażających jeden stósunek, zrobimy dwie iakiekolwiek figury podobne, a na dwóch drugich, wyrażających drugi stósunek, zrobimy insze dwie iakiekolwiek figury podobne; w takim razie stósunek dwóch pierwszych figur, równy będzie stósunkowi

kowi dwóch drugich, bo tak stósunek dwóch pierwszych figur, iako i stósunek dwóch drugich, jest stósunkiem dwumnożnym ze dwóch równych stósunków.

Prawdzi się to w szczególności, gdy wszystkie cztery figury są sobie podobne; a tém widoczniey ieszcze się okazuje, gdy te cztery figury są kwadratami.

253. Mając dwie proporcye, których wyrazy wszystkie są liniami, Prostokąt z poprzedników dwóch pierwszych stósunków, w każdej proporcyi tak się mieć będzie do Prostokąta z dwóch ich następników, iak Prostokąt z poprzedników, drugich dwóch stósunków do Prostokąta z ichże następników.

Należy to objaśnić naprzód na przykładach liczebnych, pokazując, że gdy będą dwie proporcye w liczbach wyrażone, poprzedniki dwóch pierwszych stósunków, w obudwóch proporcjach, ieden przez drugi rozmnożone, tak się mieć będą do swoich następników przez siebie także rozmnożonych; iak i insze dwa poprzedniki, ieden przez drugi rozmnożone, do swoich następników podobnie rozmnożonych.

Przykład. Niech będzie:  $14:7=6:3$ .  
i znowu  $15:5=12:4$ .  
będzie też  $14 \times 15 : 7 \times 5 = 6 \times 12 : 3 \times 4$ .  
to jest,  $210 : 35 = 72 : 12$ .

To

O stosunkach powierzchni Figur 219

To co na liczebnych przykładach widocznie się pokaże, trzeba i jeszcze stwierdzić rozumowaniem podobnym następującemu. Jeżeli poprzednik w pierwszej proporcji jest dwa razy na przykład większy od swego następnika, a poprzednik w drugiej proporcji, trzy razy na przykład jest większy od swego także następnika; tedy rozmnożywszy pierwszego poprzednika, pierwszej proporcji, przez pierwszego poprzednika drugiej proporcji, poprzednik z tych dwóch rozmnożony, będzie dwa razy trzy, to jest sześć razy większy, od następnika podobnie z dwóch następników pierwszych, w obu dwóch proporcjach rozmnożonego; a że i drugi dwa poprzedniki, są, jeden dwa razy, a drugi trzy razy, większe od swoich następników; więc tak pierwszy poprzednik ze dwóch pierwszych poprzedników rozmnożony, iak i drugi poprzednik ze dwóch drugich rozmnożony, będzie sześć razy większy od swego następnika podobnie rozmnożonego; które to rozumowanie przystosować można i do każdego innego wykładnika.

Niech litery  $A, B, C, D$ , wyrażają cztery linie składające pierwszą proporcję, i niech litery  $a, b, c, d$ , wyrażają drugie cztery linie składające drugą proporcję, to jest: niech będzie;  $A:B=C:D$ .  
i  $a:b=c:d$ ; będzie też  $A \times a: B \times b = C \times c: D \times d$ . Bo



Bo náprzód  $A : B = Aa : Ba.$

i podobnie  $C : D = Cc : Dc.$

A że  $A : B = C : D.$

Więc  $Aa : Ba = Cc : Dc.$

Tak téż znowu;  $a : b = Ba : Pb.$

$c : d = Dc : Dd.$

A że  $a : b = c : d.$

Więc  $Ba : Pb = Dc : Dd.$

Stósunek tedy złożony z stósunków:

$Aa : Ba.$

i  $Ba : Pb.$

To jest stósunek  $Aa : Pb$ , równa się stósunkowi złożonému z stósunków

$Cc : Dc.$

i  $Dc : Dd.$

To jest stósunkowi,  $Cc : Dd.$

albo co na jedno wychodzi,  $Aa : Pb = Cc : Dd.$

## ROZDZIAŁ X.

### O wielokątach forémnych.

254. *Defin:* Gdy wielokąt má wszystkie boki i kąty równe; nazywá się *Wielokątem forémnym* (*Polygonum regulare.*)

*O wielokątach foremnych.* 221

255. *Wniosek.* Ponieważ ważność wszystkich razem kątów wielokąta, zawisła tylko od liczby boków jego (85) gdy tedy wszystkie kąty wielokąta są równe, ważność iednego z tych kątów, zawisła tylko od liczby boków tegoż wielokąta. Stąd idzie, że wielokąty foremne, iednakową mając liczbę boków, kąty też wszystkie mają równe, i boki proporcjonalne; są więc do siebie podobne. Można tedy przystosować im to wszystko, co się w ogólności o figurach podobnych powiedziało.

Wiemy już sposób wykreślenia Trójkątą równobocznego i kwadratu na linii danej; wiemy też iak wpisać w Trójkąt równoboczny, lub na nim opisać koło.

Wpisanie w koło dane, Trójkąta równobocznego, i opisanie tegoż koła Trójkątem, łatwiej się wykonywá przez wykreślenie Sześciokąta foremnego (Hexagonum.)

256. *Twierdzenie I.* Bok sześciokąta w koło wpisanego, równy jest promieniowi tegoż koła.

Niech będzie ABCDEF sześciokąt foremny, w koło wpisany; bok którykolwiek tego sześciokąta n.p. AB, równy jest promieniowi SB tegoż koła.

Tab. XV.  
Fig. 2.

Wy-

Wykreślenie. Poprowadźmy promień SA:

Dowódz: Kąt ASB, zamykając szóstą część, czterech kątów prostych, to jest  $\frac{2}{3}$  jednego kąta prostego: a że trzy kąty Trójkąta ASB, składają dwa kąty proste; więc dwa kąty A i B tegoż Trójkąta, razem wzięte są różnicą między dwoma kątami prostymi i  $\frac{2}{3}$  jednego kąta prostego, to jest, czynią  $\frac{4}{3}$  kąta prostego. Ponieważ zaś te dwa kąty są sobie równe; więc każdy z nich będzie  $\frac{2}{3}$  kąta prostego: a zatem wszystkie trzy kąty Trójkąta ASB są równe, i dla tego też i boki wszystkie trzy równe będą. Będzie tedy bok AB, sześciokąta foremnego (czyli cięciwa 60. stopniów) równy promieniowi koła opisanego.

257. Wniosek 1. Aby więc wpisać sześciokąt foremny w koło dane, dosyć jest przenieść 6. razy, iako cięciwę, promień tego koła, na okrąg jego.

258. Wniosek 2. Poprowadziwszy linię AC, będzie ona cięciwą trzeciej części okręgu koła, a zatem będzie bokiem Trójkąta równobocznego wpisanego w dane koło. Pociągnąwszy tedy linie AE, CE, Trójkąt ACE, będzie Trójkątem równobocznym w koło wpisanym,

## O wielokątach foremnych. 223

259. *Twierdzeń:* 2. Gdy w koło wpisany będzie Trójkąt równoboczny, a przez wierzchołki kątów jego  $\alpha$  pociągniemy styczne z kołem tak daleko, aż się z sobą zniydą; te styczne zrobią Trójkąt równoboczny na kole opisany.

Niech będzie ABC Trójkąt równoboczny wpisany w koło SABC; przez wierzchołki A, B, C, tego Trójkąta prowadzone styczne koła, aż do spotkania się ich z sobą w punktach D, E, F, zrobią Trójkąt równoboczny na kole opisany. Tab. XV.  
Fig. 2.

*Wykreślenie.* Pociągniemy promienie SA, SB, SC.

*Dowódz:* Którykolwiek z kątów w środku koła, na przykład kąt ASB, i iemu przeciwny kąt E, między dwiema stycznymi zawarty, czynią razem dwa kąty proste. A że kąty wszystkie trzy we środku koła są równe; więc równe będą i kąty trzy od stycznych zrobione, a zatem i Trójkąt DEF będzie równoboczny.

Łatwo więc opisać można dané koło Trójkątem równobocznym, wpisawszy pierwéy w toż koło Trójkąt także równoboczny.

260. W ogólności zaś mówiąc: niech-

by

by był iakikolwiek wielokąt foremny w koło wpisany; jeżeli przez wszystkie wierzchołki kątów tego wielokąta poprowadzimy styczne koła, tak, aby każde dwie blizkie z sobą się spotykały; Wielokąt, który z tych stycznych zrobi się, będzie także foremnym.

*Dowódz:* We wszystkich czworokątach takich, iak na przykład ASBE, kąty między dwiema stycznymi zawarte, iak na przykład kąt E, będą równe, a zatem wszystkie kąty tego Wielokąta będą równe.

Wszystkie także Trójkąty, iak na przykład ABE będą równoramienne, i kąty w jednym Trójkacie, równe będą kątom w drugim, i podstawy w nich, iak na przykład jest podstawa AB, będą równe: a zatem wszystkie te Trójkąty mogą przystać do siebie, i stąd boki jednego Trójkąta równe będą bokom drugiego. Więc summa dwóch takich równych boków iednakowa zawsze będzie. A że na przykład EF jest summą dwóch takich równych boków Wielokąta opisanego; więc wszystkie boki tego Wielokąta równe będą.

261. *Twierdż:* 3. W każdy Wielokąt foremny, można wpisać iedno koło, i drugie koło na nim opisać, a obadwa te koła, spółny mieć będą środek.

Niech



## O wielokątach foremnych 225

Niech będzie jakikolwiek sześciokąt foremny, ABCDEF, można zawsze wpisać weń koło, i drugie na nim opisać, a te dwa koła będą współśrodkowe. (circuli concentrici.)

**Dowodz:** Od środka dwóch boków blizkich, na przykład od G, i H, wyprowadziwszy dwie prostopadłe: GS, HS; punkt S przecięcia ich, iednakowo będzie odległy od trzech wierzchołków blizkich A, B, C (według tego, co się już powiedziało o opisanu kołem Trójkąta) będą tedy równe linie AS, BS, CS; a zatem Trójkąty SBC, SBA równe względem siebie boki mieć będą, i ieden Trójkąt przystać może do drugiego: a w szczególności kąt SBC, równy jest kątowi SBA, i każdy z nich czyni połowę kąta w wielokącie, to jest kąta ABC. A że też równe są i kąty SCB, SBC; więc i kąt SCB, będzie połową kąta w Wielokącie, a zatem kąt SCD, będzie drugą jego połową. Mają więc Trójkąty: SCD, SCB spółny bok: SC; równe boki: CD, CB, i kąty w C między niemi zawarte, równe. Mogą tedy i te dwa Trójkąty przystać do siebie, a w szczególności linie SB, SD równe będą. Więc to koło, którego środkiem jest S, i które przechodzi przez punkta blizkie: A, B, C, przechodzić także będzie i przez punkt następujący: D. Podobnym sposobem pokazać można, że toż koło przechodząc przez punkta: B, C, D, przechodzi

Táb. XV.  
Fig. 3.

chodząc będzie i przez punkt E, i t. d.

Wszystkie promienie: SA, SB, SC, SD, i t. d. dzielą w wierzchołkach na dwie równe części, kąty Wielokąta, iako się pokazało: a zatem dwa Trójkąty na przykład SBH, SBG, mogą przyrastać do siebie, bo mają kąty proste przy H i G, bok spólny: SB, i kąty przy B równe; a w szczególności linie SH, SG są równe; toż samo można by dowieść i względem innych prostopadłych spuszczonech od środka S, na boki wielokąta. Punkt tedy S, jest jednakowo odległy od wszystkich boków Wielokąta, a zatem jest środkiem koła, któreby wpisać można w Wielokąt.

262. *Twierdza 4.* Mając Wielokąt foremny w koło wpisany, a przeciąwszy na dwie równe części łuk, którego cięciwą, jest bok tego Wielokąta, i od punktu każdego takiego przecięcia poprowadzwszy linię do dwóch końców łuku, zrobi się z tych linii inny wielokąt foremny, tyleż dwójce co pierwszy boków mający.

1. Wszystkie boki tego nowego wielokąta będą równe, bo będą cięciwami połowy łuków równych.

2. Wszystkie także kąty tego Wielokąta, będą równe, bo każdy z nich będzie dwa razy większy od kąta przy podstawie Trójkątów równoramiennych, i przystać do siebie

O wielokątach foremnych. 227

siebie mogących, które za boki, mają promienie koła.

Ten tedy Wielokąt, będzie miał wszystkie boki i kąty równe, a zatem będzie foremnym.

Podobnym sposobem dowieśdź można by, że jeżeli boki Wielokąta, są cięciwami tyluż części równych koła, ile Wielokąt ma boków; ten Wielokąt będzie foremnym i a zatem wykreślenie Wielokąta foremnego, któryby zamykał w sobie pewną liczbę boków danych, zależy od tego, aby podzielić okrąg koła na daną liczbę części równych.

263. Zagadn: Na danym kwadracie opisać, i wpisać weń koło; i znowu w dane koło wpisać, i opisać na nim kwadrat.

Rozwiąz: 1. Prowadzę dwie przekątne w kwadracie: punkt przecięcia ich, będzie środkiem koła, które wpisać w kwadrat, i opisać na nim mamy.

2. Prowadzę dwie średnice w kole, iędnę do drugiey prostopadłą. Końce ich będą wierzchołkami kwadratu wpisanego w koło mogącego: przez te wierzchołki pociągnąwszy styczne koła, te zrobią kwadrat na kole opisany.

264. Wniosek 1. Kwadrat opisany na kole,

kole; równa się kwadratowi średnicy jego, i dwa razy jest większy od kwadratu wpisanego.

265. *Wniosek 2.* Z tego co się wyżej powiedziało, wynika, że przez podział, (subdivisiones) ciągłe łuków na dwie części równe, można wpisać w koło Wielokąty, których liczba boków byłaby następująca.

3, 6, 12, 24, 48, 96, albo w ogólności.  
 $3 \times 2^n$  (x)

4, 8, 16, 32, 64, 128, albo w ogólności.  
 $4 \times 2^n$

*Przestr.* Za pomocą samego linijatu i Cyrkla nie można z zupełną dokładnością i pewnością (to jest bez szukania takowego podziału cyrklem) podzielić łuk każdy na 3, 5, 7, i t. d. części równych; a zatem z takową samą pomocą, nie można zawsze wykreślić takie Wielokąty, których liczba boków wyrażałaby się przez liczby rozmnożne, z 3. lub 4; i t. d. przez 3, raz lub więcej razy wzięte.

266. *Twierdż. 5.* Powierzchnia Wielokąta opisanego na kole, a w szczególności

---

(x) Co znaczą te wyrazy:  $3 \times 2^n$ ,  $4 \times 2^n$ . da się poznać w Algiebrze.

X.  
y ie-  
ratu  
yżéy  
ady,  
czę-  
iolo-  
na-  
ości.  
(x)  
ości.  
tu i  
ością  
ako-  
ka-  
n: a  
mo-  
aty,  
rzez  
rzez  
elo-  
lno-  
ci  
2<sup>n</sup>,  
Nic.

O wielokątach foremnych. 229

ści Wielokąta foremnego równa się Trójkątowi mającemu za wysokość promień tego koła, a za podstawę obwód (Perimeter) tego Wielokąta

Wykreśl. Od środka koła poprowadźmy linie do wszystkich wierzchołków Wielokąta.

Dowodz. Wielokąt podzielony będzie przez te linie, na tyle Trójkątów, ile ma boków; Trójkąty zaś te mają za wysokość promień koła, a za podstawę boki Wielokąta; więc powierzchnia tych wszystkich Trójkątów, czyli powierzchnia Wielokąta równa jest jednemu Trójkątowi, któryby miał za wysokość promień tego koła, a za podstawę obwód Wielokąta.

267. Wniosek. Gdy rozmaite Wielokąty opisane są na jednym kole; ich powierzchnie mieć się do siebie będą, jak obwody.

268. Twierdzenie 6. Powierzchnia Wielokąta foremnego, w koło wpisane, równa się Trójkątowi mającemu za wysokość promień tego koła, a za podstawę, obwód wielokąta inszego foremnego w toż koło wpisanego, a tylko połowę tyle boków mającego.



Tłb. XV. Niechay na przykład sześciokąt ABCD, Fig. 1. EF, wystawia nam iakikolwiek Wielokąt foremny, w koło wpisany, powierzchnią tego sześciokąta równą jest Trójkątowi, mającemu za wysokość promień tego koła, a za podstawę obwód Trójkąta równobocznego, w toż samo koło wpisanego.

Dowódz: Poprowadźmy promień SB przecinający w punkcie G, bok Trójkąta równobocznego. Trójkąt ASB, uważać można, iak gdyby miał podstawę SB, a wysokość AG, Trójkąt także CSB uważać można, iak gdyby miał podstawę SB, a wysokość CG: a zatem czworokąt AS CB równa się Trójkątowi, któryby miał albo wysokość AC, a podstawę SB. Toż mówić i o inszych Czworokątach, zawartych między dwoma Wielokąta bokami przyległemi, i dwoma promieniami; summa więc powierzchni, wszystkich tych czworokątów, to jest powierzchnią Wielokąta foremnego w koło wpisanego, równa się takiemu Trójkątowi, któryby miał za wysokość promień tego koła, a za podstawę obwód Wielokąta inszego foremnego, w toż koło wpisanego, a połowę tylę boków mającego.

Przykład. Powierzchnią Dwunastokąta foremnego w koło wpisanego, równa się Trójkątowi, mającemu za wysokość, pro-

promień tego koła, a za podstawę obwód sześciokąta, w toż koło wpisanego, albo, (co na jedno wychodzi) równa się Prostokątowi, któryby miał za wysokość, promień tego koła, a za podstawę, tenże promień trzy razy wzięty.

Ta więc powierzchnia jest trzy razy większą od kwadratu promienia, i jest równa  $\frac{3}{4}$  kwadratu średnicy.

Twierdzenie to stosuje się tylko do Wielokątów, których boki są parzyste; następujące Twierdzenie przystosować można do wszystkich ogólnie Wielokątów foremnych.

269. Twierdź: 7. Powierzchnia Wielokąta foremnego w koło wpisanego, równa się Trójkątowi, mającemu za wysokość prostopadłą spuszczoną od środka koła do boku wielokąta, a za podstawę obwód jego. (y)

Dowód: Prostopadłą tę uważać można, iak promień koła wpisanego, lub wpisać się mogącego w Wielokąt: a zatem twierdzenie to jest tylko przystosowaniem wyższego (266.)

270.

---

(y) Taką w szczególności prostopadłą nazywają się z Greckiego apothema.

270. *Wniosek.* Jeżeli od punktu iakiegokolwiek w Wielokącie foremnym, nawet i w tym, którego boki tylko wszystkie są równe, spuścimy prostopadłe do wszystkich jego boków; té prostopadłe dodane do siebie, iednakową zawsze długość uczynią.

Jakoż poprowadziwszy od tego samego punktu dwie linie do dwóch końców iednego z boków, powierzchnią Trójkątą, temi liniami zakończoną, równą będzie Trójkątowi mającemu za podstawę bok wielokąta, a za wysokość prostopadłą nań spuszczoną: albo, co na iedno wychodzi, powierzchnią tą równą będzie Trójkątowi mającemu za wysokość bok Wielokąta, a za podstawę, prostopadłą nań spuszczoną: a zatem powierzchnią całego Wielokąta równać się będzie Trójkątowi, któryby miał za wysokość bok tego Wielokąta, a za podstawę sumnę wszystkich prostopadłych na boki jego spuszczonych. A że powierzchnią takowego Trójkąta iest zawsze iednakową, i wysokość także iednakową; więc i podstawa, czyli summa wszystkich prostopadłych iednakową zawsze będzie, z któregożkolwiek punktu Wielokąta, onę spuścimy.

WSTĘP DO ROZDZIAŁÓW  
XI. i XII.

O używaniu Przenośnika, Cyrkla proporcjonalnego, i o Podziale nazywanym Nonnuszem.

271. *Defin.* Przenośnik (Transportator) Tab. XVI.  
jest to półkoła, którego okrąg podzielony jest na stopnie, albo, gdy większy będzie, na półstopnie, i ćwierci stopniów.

272. *Zagadn. 1.* Mając dany kąt na papierze, znaleźć liczbę stopniów, którą w sobie zamyka.

*Sposób. 1.* Przykładam szrodek przenośnika do wierzchołka kąta danego, a podstawę tegoż przenośnika do jednego z ramion kąta; łuk przenośnika zawarty między ramionami kąta, pokáže w stopniach ważność jego.

*Sposób 2.* Od wierzchołka kąta danego, iak od szrodka, promieniem równym promieniowi przenośnika, kręślę łuk zawarty między ramionami kąta, odległość dwóch końców tego łuku przenoszę cyrklem na okrąg przenośnika, od końca średnicy, która mu służy za podstawę; łuk przenośnika między końcem średnicy i drugim punktem,

ktęm, gdzie drugie ramię Cyrkla przy-  
padnie, zawarty, pokáže w stopniach  
wążność kąta danego.

273. *Zagádn. 2.* Na linii daney, i przy  
punkcie na nię danym, zrobić kąt za-  
wierający w sobie daną liczbę stopniów.

*Sposób 1.* Położywszy na linii daney  
przenośnik, tak, aby średnica iego, do  
tęj linii przystawała, a środek do punktu  
danego, naznaczam na papierze punkt,  
któremu odpowiada punkt przenośnika  
ukazujący liczbę daną stopniów, ten  
punkt łączę linią z punktem danym, a  
ta linia uczyni z daną kąt, którego szu-  
kałem.

To działanie będzie dokładniejsze, gdy  
przenośnik má sobie przydany promień  
ruchomy około środka iego.

*Sposób 2.* Od punktu danego, iak od  
śródká, promieniem równym promienio-  
wi przenośnika, kręślę łuk, i na ten,  
wziętą na przenośniku liczbę stopniów  
danych przenoszę, od punktu przecięcia  
linii z tym łukiem, aż do drugiego pun-  
ktu na tymże łuku. Punkt ten ostatni złą-  
czywszy linią z punktem danym na dłu-  
gięj linii, té obiedwie linie zamykać będą  
kąt którego szukałem.

274. *Zagádn. 3.* W dané koło, wpisać  
Wielo-



*O wielokątach forémnych.* 235

Wielokąt forémny o pewnéy liczbie boków.

*Rozwiąz.* Szukám kąta w środku tego Wielokąta; ciągnę promień jakikolwiek, i robię na nim kąt równy kątowni w środku Wielokąta, mający środek koła danego za wierzchołek; łuk tego koła zawarty między ramionami kąta, będzie miał za cięciwę bok Wielokąta danego.

275. *Zagad.* 4. Na danéy linii wykreślić Wielokąt forémny o pewnéy liczbie boków.

*Rozwiąz.* Przy dwóch końcach danéy linii robię dwa kąty równe połowie kąta, przy obwodzie Wielokąta, którego szukám. Punkt przecięcia ramion tych dwóch kątów będzie środkiem koła, w które wpisać się dá Wielokąt, o tylu bokach, ile ich dano, i téy wielkości, iakiéy jest linią daną.

276. *Uwaga.* Używanie przenośnika, wyciągá wielkiéy baczności. Im większy promień mieć będzie, tym mniej obawiać się trzeba znaczniejszego iakiégo uchybienia.

Miedzy inszemi narzędziá tego niedostatkami, jest ten mianowicie, że promienia w nim odmienić nie można według okoliczności; ale ten niedostatek zastąpić

stąpić może w potrzebie insze narzędzie nazwane *linią cięnciw* ( *linią chordarum* ) w cyrkle proporcjonalnym.

Táb. XVII. 277. Na obudwóch ramionach cyrkła proporcjonalnego, znayduie się *linia cięnciw*, którzy podziały zaczynaia się we śródku ( *in centro* ) tego narzędzia; a kończą tam; gdzie iest liczba 180, albo w mnieyszych narzędziach tam, gdzie iest liczba 60. Odległości śródku od inszych punktów podziału, pokazują wielkość cięnciw wyznaczoną przez *rachunek* ( *per calculum* ) albo przez figurę dokładną. Ta wielkość cięnciw wyznaczoną iest w półkole, którego promień równa się odległości śródku cyrkła proporcjonalnego od punktu podziału naznaczonego liczbą 60. a to z przyczyny równości cięnciwy 60, stopniów z promieniem.

Ponieważ rozwiązanie czterech poprzedzających zagadnień iedynie zawisło od wyznaczenia cięnciwy łuku, to iest od wielkości iey względem promienia; można więc cztery te Zagadnienia rozwiązać, używając, iednego tylko ramienia w cyrkle proporcjonalnym, biorąc za promień koła odległość punktów: 0, i 60.

Dwa razém ramiona tego cyrkła służą do odmiennienia; promienia; náy mnieyszym będzie, odległość dwóch punktów 60, i 60. gdy cyrkiel proporcjonalny zupełnie iest

jest zamknięty; powiększonym zaś będzie przez odległość większą tychże punktów, gdy cyrkiel coraz więcej otworzymy: a największym będzie, gdy cyrkiel wcale tak otworzymy, że ramiona jego wprostę będą linii.

Niechby na przykład tak był otworzony cyrkiel proporcjonalny, aby odległość dwóch punktów 60. i 60, czyniła połowę odległości iednego z tych punktów, od środka; będzie też i odległość drugich punktów odpowiadających sobie na przykład 40 i 40, połową odległości iednego z nich od środka; a zatem odległość ta punktów: 40, i 40, oznaczyłaby cięciwę stopniów 40, albo  $40^{\circ}$ , w kole, którego promień równałby się odległości punktów 60 i 60; bo cięciwy łuków podobnych, w kołach różnych tak się mają do siebie, jak tychże kół promienie. W ogólności więc mówiąc: gdy za promień weźmiemy odległość punktów 60. i 60, na linii cięciw, jakąkolwiek inszą odległość dwóch punktów na téżej linii, naznaczonych iednakową liczbą, będzie cięciwą łuku, o tylu stopniach, ile wyraża ta liczba.

Stąd wynika sposób, którego użyć wygodnie można, chcąc rozwiązać cztery poprzedzające zagadnienia, przez linią cięciw, i odmiennając jak się podobą promień.

278. *Przykład 1.* Na daney linii i przy punkcie na nięj także danym, zrobić kąt o pewney liczbie stopniów.

*Rozwiąz.* Weźmy iakikolwiek promień, otworzmy cyrkiel proporcjonalny tak, aby odległość punktów naznaczonych liczbą 60, była równą temu promieniowi. Od punktu danego, iak od środka, promieniem tymże nakreślmy łuk koła, i dajmy mu cięciwę równą odległości dwóch punktów naznaczonych liczbą daną stopniów.

279. *Przykl. 2.* Na daney linii wykreślić Wielokąt foremny iakikolwiek.

*Rozwiąz.* Szukáymy kąta, iaki byđż powinien we środku Wielokąta żadanego, otworzmy cyrkiel proporcjonalny tak, aby odległość punktów naznaczonych na linii cięciw tą liczbą, iaką jest liczba stopniów kąta, we środku Wielokąta, równała się linii daney; na téżę linię wystawmy Trójkąt równoramienny, dawszy mu za ramiona, linie równe odległości punktów naznaczonych liczbą 60; wierzchołek tego Trójkąta, będzie środkiem koła, w które wpisać można Wielokąt żadany.

280. *Uwaga.* Co do wykreślenia Wielokątów foremnych w szczególności: aby się obeysdz można bez szukania kątów we  
środk-

śrzedku, znayduie się na cyrkle proporcjonalnym osobną linią. Wielokątów, za którey pomocą, zacząwszy od Tróykąta, lub czworokąta, aż do dwunastokąta wykreślić można. Odległość śrzedka, tego narzędzia, od punktu  $\sigma$ , téy linii Wielokątów, wzięwszy za promień, albo za bok Sześciokąta forémnego w koło wpisane-go, odległości tegoż śrzedka od punktów: 3, 4, 5, i t.d. pokażą wielkość boku Wielokąta forémnego, który wpisać można w to samo koło, o tylu bokach, ile znaczą liczby: 3, 4, 5, i t. d. Albo też: otworzywszy do woli cyrkiel proporcjonalny, i wzięwszy na linii Wielokątów za promień odległość punktów  $\sigma$ , i  $\sigma$ , odległości inszych dwóch punktów: 3 i 3, 4 i 4, 5 i 5, i t.d. pokażą bok Wielokąta forémnego  $\sigma$  téż saméy liczbie boków wpisanego w to koło, do którego za promień wzięliśmy odległość punktów  $\sigma$  i  $\sigma$ .

281. Trzecią linią, którą na cyrkle proporcjonalnym znayduiemy, a wielkiego jest użytku, nazywá się *linią części równych*. Na obudwóch cyrkla proporcjonalnego ramionach, mamy linią podzieloną na 200. części równych, a czasem, gdy cyrkiel mnieyszy, na 120, mniey lub więcéy. Jakożkolwiek ten cyrkiel otworzymy, odległość dwóch Punktów oznaczonych tą samą liczbą na przykład 200, będzie dwa razy wię-



większą od odległości punktów naznaczonych liczbą 100, cztery razy większa od odległości dwóch punktów, 50, i t. d. a mówiąc ogólnie, odległość dwóch iakichkolwiek punktów tą samą liczbą naznaczonych, będzie się tak miała do odległości dwóch inszych punktów przez iednakową także liczbę naznaczonych; iak się mają do siebie też liczby.

282. *Używanie 1.* Mając daną linią, podzielić ją na pewną liczbę części równych.

Niechby na przykład podzielić trzeba linią daną na 5 części równych.

Otwórzmy tak cyrkiel proporcjonalny, aby odległość punktów naznaczonych liczbą podzielną przez 5, równą była linii daney; niech na przykład odległość ta będzie punktów naznaczonych liczbą 200; weźmy piątą część tej liczby, toiest 40, a odległość tych dwóch punktów naznaczonych liczbą 40; będzie częścią piątą linii daney.

283. *Uwaga.* Ostatnią tę odległość znalezioną przenosząc 5 razy na linią daną, uchybienie któreby zayszć mogło w jej wielkości, byłoby 5 razy powtórzone, a zatem tak powtórzone, mogłoby się stać znacznym, chociaż każde z osobna było nieznaczne. Przytrafić się to może, osobliwie w ten czas, gdy na  
wiele

*O wielokątach foremnych.* 241

wiele części dzielić przychodzi linią. Aby więc tego powtarzania uniknąć, lepięy będzie wziąć osobno  $\frac{4}{5}$  linii, to jest odległość dwóch punktów: 100, i przenieść ją, od obudwóch końców na linią daną: toż uczynić, wzięwszy potem  $\frac{3}{5}$  linii i t. d.

284. *Używanie 2.* Maiąc daną linią znaleźć inną, która by do nięy była w pewnym stosunku, w liczbach wyrażonym, na przykład iak 4. do 7.

Przenieśmy linią daną na dwa punkta naznaczone liczbą podzielną przez 7, na przykład na dwa punkta: 140;  $\frac{4}{7}$  téy liczby 140, są 80; odległość tych dwóch punktów: 80, będzie linią, której szukaliśmy.

285. *Uwrażanie 3.* Maiąc dane w liczbach trzy boki Trójkąta, wykreślić go.

*Przykład:* Niechby trzy boki Trójkąta miały być iak trzy liczby: 150, 147, 128.

Otwórzmy iakokolwiek cyrkiel proporcjonalny: odległości dwóch Punktów: 150, dwóch punktów: 147, i dwóch punktów 128, będą do siebie, iak boki dane, a zatem mogą być wzięte za te boki.

286. *Używanie 4.* Mając dany Trójkąt już wykreślony, którego podstawa zamyka na przykład 100, sznurów, znaleźć wielkość inszych dwóch boków.

Przenieśmy podstawę daną na dwa punkta: 200; zmierzmy cyrklem długość dwóch innych boków, i przeniesmy ją znowu na punkta dwa jednakową liczbą oznaczone, tam gdzie przypadnie; liczby dwie, na które długość tych dwóch boków przypadnie, wyrażać będą długość tychże boków w sznurach.

Opuszczam insze używania, gdzie wykreślenie Geometryczne, krótsze jest częściej i pewniejsze; iak na prz. w znalezieniu kwadratu równego sumie dwóch inszych danych, albo więcej.

287. *Uwaga 1.* Gdy kto nie má cyrkla proporcjonalnego, może na miejsce jego, a czasem i lepiej użyć linii podzieloney na wiele części równych.

288. *Uwaga 2.* Gdy część nąymniejszą, której nam do podziału potrzeba, jest bardzo małą, a liczba części których szukamy znacznie wielką; w takim razie trudno jest mieć wszystkie, na téż saméj linii, podziały, tak aby ie dobrze rozeznąć można. Udamy się więc w podobnym razie do sposobu następującego:

Niech

Niechby podana była linia, która zbyt Tab. XV.  
jest mała, aby ją widocznie na 10; części Fig. 4  
podzielić można; trzeba osobno te części  
wynałęć od 1, aż do 10.

Rozwiąż. Przez dwa końce téj linii  
prowadzę, po iedney stronie dwie ró-  
wnoodległe. Na te równoodległe przeni-  
szę od końców linii daney dziesięć ró-  
wnych części; każdy Punkt podziału  
w jedney równoodległej, łączę linią z pun-  
ktem odpowiadającym mu na drugiej  
równoodległej. (Te linie łączące będą  
równoodległe od linii daney.) Od końca  
iednego linii daney, ciągnę linią poprze-  
czną do końca drugiego linii ostatniéj  
równoodległej; od daney ta poprzeczna  
linia wyznaczy na równoodległych od  
linii daney, części których szukam.

Mając daną linią bardzo małą, do po-  
dzielenia na 100. równych części, ale ie-  
dnak tak wielką, aby mogła być wido-  
cznie podzieloną na 10; równych części;  
podzielić ją tak, aby tyle zaraz części ró-  
wnych wyznaczyć na niéj można, ile ze-  
chcemy, zaczawszy od 1, aż do 100.

Tab. XV.  
Fig. 5.

Rozwiąż. Podzielmy tę linią na 10.  
równych części; przez pierwszy punkt  
podziału, i przez drugi koniec téj linii,  
wyciągniemy dwie równoodległe i takie-  
kolwiek, (zreżniemy iednak, i wygodniéj  
jest, aby mało co od prostopadłych uchy-  
lić.)

Qz. bia-

biały: ) Przenieśmy [znowu na te dwie równoodległe 10, części równych, albo mało różniących się od części linii daney.

Złączmy drugi koniec linii daney, od którego nie była prowadzona równoodległa, z ostatnim punktem podziału, równoodległej bliższej; złączmy także i punkta iedney równoodległej z punktami odpowiadającymi na drugiej, i przeciągniemy je aż do linii ostatniej nie równoodległej. Nakoniec przez wszystkie punkta podziału linii daney prowadźmy równoodległe od dwóch pierwszych równoodległych, co z łatwością przyjdzie, przenioszwszy podziały linii daney, na linią jej przeciwną i łącząc końce dwóch pierwszych równoodległych, i złączwszy liniami punkta podziału odpowiadające. Po takim wykreśleniu mieć zaraz można tyle co chcemy, części równych na linii daney, zaczawszy od 1. aż do 100.

Trzeba na przykład znaleźć nam części 64, takich, iakich linii daną ma 100.

Stawmy ramię iedne cyrkla zwyczajnego na punkcie średnim, 4, i otworzmy cyrkiel szeroko, aż drugie ramię jego przypadnie na przecięcie dwóch linii których końce naznaczone są liczbami: 4 i 60. Ta otwartość cyrkla, da nam liczbę części, których szukaliśmy, i t. d.

Prze-



### O wielokątach foremnych. 245

Przedłużając linią daną i wszystkie od niej równoodległe, aż póki te przedłużenia nie będą równe linii danej wziętej raz, dwa razy, trzy razy -- dziesięć razy, otrzymamy taką liczbę części, jaką zechcemy, zaczawszy od 1, aż do 200, 300, 400. -- 1000.

Taką *podziałka* (scala) jest do używania nąwygodniejszą, gdy kto nie ma cyrkla proporcjonalnego, dla tego też i nąwięcej jej używają.

289. Inny sposób do wynalezienia części równych linii danej, tak małej, że jej podzielić widocznie nie można na części żądane, jest ten, który się nazywa *podziałem Nonniusza*, a który raczej nazywaćby się powinien *podziałem Verniera*, z przyczyny, że tak zwął się prawdziwy podziału tego wynalazca.

Niechby na przykład przyszło podzielić na 30. równych części linią tak małą, że widocznie na niej części tych wyznaczyć nie można, niechby jednak była tej wielkości, że można ją wyraźnie podzielić na 5, albo 6, części równych.

Podzielimy tę linią na przykład na 6. Tab. XV.  
części równych, i drugą jej równą na 5. Fig. 6.  
równych także części. Różnica szóstych części pierwszego podziału, od piątej części drugiego podziału, będzie równą różnicy

cy między  $\frac{1}{3}$  i  $\frac{1}{3}$ , częścią całej téj linii daney, toiest, będzie  $\frac{1}{30}$  téj linii. Gdy tedy té dwie linie tak ułożymy, że jedna będzie przy drugiey, i końce iedney wpróft będą na przeciwko końców drugiey; odległość dwóch punktów pierwszego podziału w obudwóch liniach, będzie 30tą częścią daney linii; pod obnie odległość dwóch punktów drugiego podziału (rachując od tychże samych, co wyżej końców) będzie:  $\frac{2}{30}$ , odległość dwóch punktów trzeciego podziału:  $\frac{3}{30}$  czwartego  $\frac{4}{30}$  piątego:  $\frac{5}{30}$ , albo  $\frac{1}{6}$ , częścią całej linii daney: toiest, iedną z tych części, na którą té ta linia jest podzieloną.

Tab. XVII. 290. Czwartą linią, którą ieszcze zwykła się znaydować na cyrkłach proporcjonalnych, i którey wykreślenie zasądza się na tém; co się wyżej iuż wyłożyło, nazwaną jest *linią Plaszczyn* (linea Planorum)

Odległości środka w cyrklu proporcjonalnym od punktów podziału téj linii, tak się mają do siebie, iak boki kwadratów, które w tym samym stosunku byłyby do siebie, w którym są liczby przy tychże punktach wyrażone. I tak gdyby kwadrat ieden był: 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, razy większy od drugiego; bok tego drugiego kwadratu większy byłby

## 247

2, 3; 4, 5, 6, 7, 8, razy od pierwszego; dla tego też odległości od środka, punktów naznaczonych liczbami: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, tak się mają do siebie, iak liczby: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Szczupłość narzędzia nie pozwoliła da-  
leż tych podziałów: rozciągnąć. Co się  
zaś tycze boków w kwadratach średnich  
między temi, które się dopiero wyraziły,  
można je wyznaczyć przez figurę dokła-  
dną lub przez rachunek przybliżając ich  
ważność do prawdziwej. J tak jeżeli  
odległość środka od punktu: 1, będzie  
wyrażać bok kwadratu równy na prz: 12  
jakim. częściom; odległość tegoż środka  
od punktu: 2; wyrazi bok innego kwa-  
dratu równy, blisko 17. takimże częściami;  
albo gdy pierwszą odległość, znaczy nap:  
100, drugą znaczyć będzie stronę więcej  
jak 141, i t. d.

Używanie w tém, dwóch ramióń cyr-  
kla proporcjonalnego, jest to samo, któ-  
re było i do innych linii.

Ponieważ na przykład odległości środka od punktów:

Do siebie, jak liczby, i odległości dwóch punktów i liczba naznaczonych:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64,

Przy jakim-

kolwiek o-

twieraniu

cyrkla, mieć

się będą iak

liczby

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,

Toż mówić i o innych liczbach pośrze-  
dnich.

*Przystósowanie* Niech będzie dany bok  
kwadratu iednego; trzeba znaleźć bok in-  
nego kwadratu, któryby by  $\frac{1}{2}$ , pierwszégó.

Otwieram tak cyrkiel proporcjonalny,  
aby dwa ramiona cyrkla zwyczajnego,  
z otwartością równą bokowi danému,  
przypadły na dwa punkta linii płaszczyzn  
iednakową liczbą naznaczone, któreby  
podzieloną bydź mogła przez 6, na przy-  
kład na dwa punkta: 60. Biorę  $\frac{5}{6}$  tej licz-  
by 60, toiest: 50, i nie odmieniając otwarcia  
cyrkla proporcjonalnego, mierzę odle-  
głość dwóch punktów, 50; a ta będzie  
linią której szukam, za bok kwadratowi,  
małacemu bydź  $\frac{5}{6}$ , kwadratu danego; a że  
figury podobne mają się do siebie, iak  
kwadraty ich boków odpowiadających  
sobie, przeto działanie to przystósować  
równie można do wszystkich figur podo-  
bnych.

✱ ————— ✱ 249

## R O Z D Z I A Ł    XI.

### *Pierwsze początki Miernictwa.*

Jżeli gdzie nauka o figurach podobnych używana bywa w praktyce, to szczególniey gdy się wykreślają na papierze figury, choć w małości swojej, podobne tym, których są wyobrażeniem; i gdy wyznaczamy na karcie położenie punktów na polu na przykład znaydujących się, których tam dla różnych zawad wyznaczyć częstokroć nie można.

291. *Przykład 1.* Niech będzie izba kwadratowa, której bok zmierzony, ma łokci .10.

Jakiękolwiek, wielkości kwadrat odrysujemy na papierze, zawsze jego figura, podobną będzie do figury izby.

Żeby jednak patrzeć na kwadrat na papierze odrysowany, można sobie wystawić wielkość tej izby trzeba położyć i oznaczyć *Podziłkę*, według której bok izby przenieśliśmy na papier: bo inaczej zapatrując się na ten ostatni kwadrat, poznalibyśmy, tylko jaką jest figura izby, a nie wiedzieli jeszcze, jaką tej wielkość.

Gdyby ta izba była prostokątem, mianowicie długość łokci na przykład 12, a szerokości łokci 8; odrysowawszy na papierze



rze jakiegokolwiek prostokąt, którego dwa boki miałyby się do siebie, jak 12, do 8; ten prostokąt podobny do izby, wystawiłby nam tę figurę, ale nie wielkość: która dopiero w ten czas byłaby poznana; gdyby się wyraziło, w jakiej mierze to przeniesienie boków izby na papierze stało się; czyli to przypisać do boku odrzyśowanego że łokci 12, ukaznie, czyli oznaczając jaką jest długość na papierze wyrażającą łokci 10. i t. d.

Mierzac podobnie długość i szerokość domów, dziedzińców, ulic, grubość murów i t. d. można wyrazić na papierze wszystkie te, iedne względem drugich położenia i wielkość każdej z osobna części np. budynku i t. d.

Można potem i drobniejsze części wyrazić, kładąc położenia drzwi, okien, i t. d. aby pod ieden razem widok poddać budynek cały z jego częściami.

Kilkakrotnie takowe roboty czyniąc, nabędą w nich Uczniowie coraz większą łatwość.

292. *Przykład 2.* Niech będzie na polu Trójkąt, którego boki wszystkie zmierzć można; ieden z tych boków zawierá łokci: 180, drugi: 164, trzeci 148.

Zróbmy jakiegokolwiek podziałkę, i według

*Pierwsze początki Miernictwa 251*

dług niey zróbmy Tróykąt, którego trzy boki zawierałyby liczbę części równych z téy podziałki ieden: 180, drugi: 164. trzeci 148. Ponieważ, ten mały Tróykąt má boki w tym samym stósunku, w którym są boki Tróykąta wielkiego, na polu na przykład wymierzone; niczym więc od wielkiego Tróykąta różnić się nie będzie, tylko samą wielkością: a zatem będzie nám go mógł wyobrazić, i dá nawet poznać samę wielkość iego, gdy na papierze wyrazimy podziałkę, której do tego użyliśmy.

293. *Uwagi.* W ostatnim przykładzie długości do mierzenia, były przywiększe, a przeto gdybyśmy używali w takim razie krótkiey iakiey miary, na przykład łokcia, robota byłaby długá, i bardzo pracowita; nadewszystko uchybienia małe, których się ciężko uchronić, w przykładaniach następnych, miary, zebrane razem, uczyniłyby omyłkę tym znaczniejszą, im części byłyby powtórzone. Z tego powodu, wniosło się używanie sążni, prętów, a nawet i sznurów, na miéyscé łokci.

Do wymiarów tedy długości znaczniejszych, należy mieć sznur, a ieszcze lepszy łańcuch, który pewną liczbę łokci albo sążni w sobie zamyká. Dámy na przykład, że łańcuch którego używamy, má w sobie 10. sążni. Takowy łańcuch

cuch, do długości 180 łokci, przyłożyć trzeba następnie sześć tylko razy, a już cała ta długość będzie wymierzona; będzie zatem wymiar i prędzy i pewniejszy. W takowych wymiarach wielkiej baczności potrzeba.

1. Należy być zapewnionym, że miarybrane są w linii prostey,

Tym końcem zostawia się żerdzie, w pewney od siebie odległości, i w tę linię, którą mierzyć przypada, tak, aby pierwszą żerdź zastąpiła następująca, a osobliwie drugi koniec linii do mierzenia: trzeba także tę żerdź ustawić prostopadle (z) używając do tego Pionu (Perpendicularum.)

2. Jeżeli na końcu linii do mierzenia nie znajduje się jaki cel znaczny, na przykład drzewo, róg domu, i t.d. trzeba tam osobliwie, gdy długość jest bardzo wielka, wystawić znak jaki, na przykład żerdź wysoką z chorągiewką, z tablicą białą na wierzchu, lub z innym podobnym znakiem.

Trzeba jeszcze uważać, aby przykła-

---

(z). Linia prostopadłą do jakiej płaszczyzny, poziomę (horizontalis) nazywać będziemy Pionową (verticalis.)

dania następne miary, były w linii prostej; według drogi od żerdziów wyznaczonej. Przeto ten, co trzyma pierwszy koniec łańcucha lub sznura, powinien się postawić wprost żerdziów, i dać znak drugiemu trzymającemu drugi koniec, aby i ten wprost niego stanął w téż samej linii; albo znowu trzecią osobą, stojąc przy końcu iednym linii do mierzenia, przestrzegać będzie, i uważać przykładających miarę, aby z linii prostej nie zchodzili.

Trzeba się starać, aby przy każdym przykładaniu miary, łańcuch lub sznur, iak nąybardziej był wyciągniony: dla tego należy go do samej ziemi przystawiać, jeżeli ta równa iest wszędzie: albo też wspierać go na podporach w pewnej odległości zostawionych; a tym sposobem nachylenie, które ciężar łańcucha, lub sznura sprawuje, będzie mniej znaczne.

I dla tegoć to, w robotach wielkiej wagi, i osobliwej dokładności wyciągających, łańcucha, ani sznura używać nie można.

5. Trzeba ieszcze mieć baczność, aby do tego samego miejsca, gdzie się miara iedna skończyła, przykładac znowu koniec sznura, lub łańcucha. Dla tego należy dla znaku wbić zaraz żerdkę lub kół

kół w to miejsce, w którym się miara przeszła zakończyła, a następująca ma się zaczynać.

6. Trzeba dobrze pamiętać, ile razy się łańcuch, lub sznur w całym wymiarze przykładat, i aby o tém dla iakiego roztargnienia nie zapomnieć; lepiej jest za każdym razem naznaczyć sobie to przykładanie, albo na karcie, albo wtykając na końcu każdego w szczególności wymiaru, znak iaki.

7. Bezpieczniéy także jest, powtórzyć zawsze wymiar cały długości.

8. Jeżeli pole do wymiérzenia wcale jest otwarte, i wolné; można je podzielić na Trójkąty; czyli to prowadząc wszystkie przekątne od iednego rogu, czyli biorąc bok ieden, za spółną podstawę tylu Trójkątów, ile będzie pozostałych rogów; czyli ieszcze wyznaczając punkt w samém polu, i uważając go iak wierzchołek, albo raczej zbiég tylu Trójkątów, ile figura, którą odrysować chcemy, má boków. Zmierzywszy potem wszystkie boki wszystkich tych Trójkątów, można będzie odrysować na papierze figurę podobną.

294. Przestroga. Tén sposób postępowania, w odrysowaniu pola, mierząc w jstocie wszystkie linie do tego po-  
trze-



*Pierwsze początki Miernictwa. 255*

trzebne, i czasu wiele zabiera, i rzadko nawet trafia się, aby pole tak było wolne, żeby na niem sposobu tego użyć można.

Inszych zatem użyć trzeba w tym razie sposobów, które się tu przytoczą, zaczynając od łatwiejszych i prostszych. Postrzedz tu łatwo będzie można, iż używanie sposobów trudniejszych i bardziej zawikłanych, nie zawisło od prawideł Geometrycznych, których grunt tenże sam jest zawsze i jednakową dokładność, ale z przyczyny niedoskonałości zmysłów naszych, i rzecznych działań.

295. Zagadn. Znaleźć iakięgo celu odległość nie mierząc ię *bezpośrednie* (immediate,) czyli nie udając się wprost, aż do samego celu.

Sposób. 1. W którym samych się tylko żerdzi lub kotów używá.

1. Wymierzmy podstawę jaką, którą się z jednéj strony kończyła na punkcie, od którego odległość celu chcemy wiedzieć. Ta podstawa (dla większej w praktyce dokładności) powinna być tym dłuższą, im odległość celu, okiem miarkowaną, zdaje się być znaczniejszą. Dla téżże w praktyce dokładności, trzeba jeszcze takie położenie  
wy-

wybrać téj podstawie, aby prostopadła, którąby do niej od celu spuścić można, iak nąyblížey iey śrzedka przypadła; ponieważ ze wszystkich inszych téżże długości podstaw, podstawa z takim położeniem iest nąywygodniejszą.

2. Wytkniemy kołami ustawionemi od obudwóch podstawy końców, dwie linie, ku celowi, którego szukamy, prowadzące.

3. Zmierzymy od iednego końca podstawy, dwie iakiękolwiek długości, iedną na podstawie, a drugą na linii kołami, wyznaczonę; zmierzmy nad to, i odległość końców, tych dwóch długości już wymierzonych. Zróbmy to samo i z drugiego końca podstawy.

Maiąc té na ziemi wymiary, możemy na papierze odrysować Trójkąt podobny temu, który má za podstawę linią na ziemi wymierzoną, a za wierzchołek, punkt ten, którego odległości szukamy.

Jakoż wyraziwszy na papierze podstawę przez linią iakąkolwiek, można będzie przy obudwóch końcach téj linii odrysować dwa Trójkąty, których boki takby się miały do siebie, iak się mają długości na ziemi wymierzone (pod liczbą 3;) a zatém i linie które się ciągnęły od końców podstawy na ziemi,

do

✓ *Pierwsze początki Miernictwa. 257*

do punktu, którego odległości szukamy, będą tak do tej podstawy nachylone, iak i linie dwie na papierze, od końców linii wyrażającey podstawę prowadzone, nachylaia się do téjże podstawy.

296. *Przestroga.* Tén sposób wielkiey bardzo wyciągá baczności, tak w działaniach na ziemi, iako i w przenoszeniu ich na papier. W tym razie tylko możnago użyć, gdy i odległości nie są znaczne, i wielką dokładność nie potrzebną: gdy na przykład wyobrażenie tylko chcemy sobie uczynić nie znaloméy odległości iakiego celu; wyznaczenie według tego sposobu położenia punktu iakiego nie dostępnego, od tego zawisło, aby doysdz nachylenia iednéy linii wiadoméy, to jest podstawy, do dwóch inszych prowadzonych od obudwóch końców téjże podstawy, ku punktowi, którego położenia szukamy: ponieważ gatunek Trójkątá, témi trzema liniami zawartego, a zatém i stosunek iego boków już wyznaczony sbędzie przez té nachylenia, *Stolik Geometryczny* (Tabula Pretoriana) i *Kątomierz* (Graphometrum, albo Instrumentum Goniometricum) są to dwa narzędzia szczególniéy używane do wyznaczenia bezśrzednie takowych nachyleń.

*Sposób 2. Przez stolik Geometryczny.*

297. Nie bawiać się nad opisaniem tego narzędzia, i sztuk do niego należących (bo samo rzucenie oka, dopiero używanie, więcej w tej mierze nauczy, niż opis choćby też najobszérniejszy), przestrzedz tylko należy, że lepiej jest mieć przy stoliku, gdy kogo stać na to, perspektywy opatrzone nitkami, w kąt prosty przecinającemi się, niżeli proste *Celowniki* (*dioptrae*) i że tenże stolik ustawić należy poziennie (*horizontaliter*) iak będzie można náyrowniey: do czego *prawidła* (*Alidae*) albo *Regulae* (a) z ruchomymi perspektywami, daleko są lepsze, niżeli te, przy których perspektywy lub *Celowniki* są nie ruchome, (b)

Aby wyznaczyć przez stolik odległość tę, w której od iakiego punktu nie dostępnego zostaliśmy; powinna do tego wymierzona być podstawa na ziemi; z ostrożnościami wyżej wzmiankowanymi, co do iey położenia i wielkości: trzeba

---

(a) Prawidło, jedno jest to, co i liniiał; że zaś przy stolikach Geometrycznych, łączą się razem i spaią z celownikami lub perspektywami, dla tego się odmiennego nazwiska użyto.

(b) Celowniki im są wyższe, tym lepsze, bo bez nachylenia, lub podniesienia stolika, można przez nie widzieć cel iaki na dół, lub w górę wystawiony.

trzeba potem postawić stolik na końcu  
jednym téj podstawy, i wyrazić tam  
ięć długość, i położenie, a to przez li-  
nię kierowaną, przez prawidło wzdłuż  
tęż podstawy ustawione. Nachylenie  
podstawy do linii poprowadzonej od ięć  
końca ku punktowi niedostępnemu, wy-  
razimy na stoliku, przez linię od koń-  
ca podstawy wiedzioną przy prawidło,  
ku temuż punktowi skierowanym. To  
zrobiwszy, przeniesiemy stolik na dru-  
gi koniec podstawy, na ziemi wymie-  
rzonej, i podobnie sobie, iak przy pier-  
wszym końcu podstawy postąpimy, cią-  
gnąc znowu przy prawidło linię od  
końca drugiego podstawy na stoliku wy-  
rażonej ku punktowi, którego odległo-  
ści szukamy. Trójkąt wykreślony tym  
sposobem na stoliku, podobny będzie  
Trójkątowi na ziemi zamkniętemu mię-  
dzy podstawą wymierzoną, i dwoma  
bokami, któreby od ięć końców prowa-  
dzone schodziły się w punkcie zostają-  
cym w odległości niedostępnej; a za-  
tem wielkości linii na stoliku wykreślo-  
nych, i podług podziałki wymierzonych,  
dadzą nam poznać i wielkości linii od-  
powiadających na ziemi. I tak niechby  
na przykład długość podstawy na zie-  
mi, była: 200 sążni, którą wyraża na  
stoliku linią zamykającą w sobie 200 ró-  
wnych części wziętych z jakiegokolwiek  
podziałki. Jeżeli druga linią na tymże  
stoliku poprowadzona od końca pier-



wszęć wyrażający podstawę, má w sobie podług téy saméy podziałki, na przykład, 180 części: to będzie dowodem, że i linią odpowiadającą téy na ziemi, zawiera 180 sążni.

298. Używanie stolika nie rozciąga się, tylko do długości pomiernych. Návwiększą taką długość, do której ieszcze stolika użyćby można, nie powinna przechodzić 300, a návwięcéy 400, sążni. Szczupłość narzędzia tego, a zatém i linii przez które musimy na niem wyrażać linie uważane na ziemi, czyni uchybiénia tym znaczniejszé, im większe są té ostatnie długości. Możemy iednak używać stolika, gdy idzie tylko o wyrażenie, na papierze gruntu iakiégo nie bardzo rozległego i prawie forémnego: albo gdy tylko wewnętrzne miejsca gruntu, chociaż obszérnego wyznaczyć potrzeba, którego położenie punktów znamienitszych, iuż wyznaczone jest sposobém dokładniejszym; który zaraz wyłożę.

299. Sposób 3. przez Kątomierz (c).  
Wy-

---

(c) Nauczyciele nie mając Kątomierza, ukážą Ucznióm przenośnik który małością tylko różni się od Kątomierza, i. tém, że nie má przydanych sobie prawideł z Célownikami.

Wystawienie przed oczy tego narzędzia, a potym używanie, da go należytey poznać. Tę tylko, co i względem stolika uwagę przydad należy, że kątomierz z ruchomemi prawidłami, na płaszczyźnie pionowey ustawioné, i perspektywami opatrzoné, lepsze są od tych, które mają prawidła nie ruchomé, zwłaszcza że wiele na tém zawisło, aby kątomierz był zawsze po ziemnie ustawiony: a długie i trudne jest działanie, chceć przywieść do iedney płaszczyzny kąty na różnych płaszczyznach uważane.

Kątomierz na to służy, aby przezeń stopniami wyznaczyć kąty, które tylko liniami na stoliku oznaczone były. Ponieważ zaś narzędzie to bywá małe, tak dla większey wygody, iak i tanności; przeto nie można oznaczyć na iego brzegu podziałów mniejszych od stopnia: przydaia mu zwyczajnie na to miejsce podział inszy, któryśmy wyżej nazwali podziałem Nonniiusza, aby tym sposobem i minut dochodzić można, przynajmniéj do 3, 4, lub 5, według wielkości narzędzia: do dosyć jest w zwyczajnych na ziemi działaniach.

Niechby łuk koła, wzięty na brzegu prawidła ruchomego (który łuk powinien iak náybardziéj przystawać do brzegu Kątomierza) i zawieraiący w sobie na

przy-

przykład 11. stopniów, podzielony był na 12 części równych; każdy takowy podział tego łuku zawierać będzie stopień 1, mniej  $\frac{1}{12}$  stopnia, to jest mniej 5, minutami; a zatém, gdy dwa podziały, ieden prawidła, a drugi stopnia zeydą się z sobą; odległości pierwszych, drugich, trzecich i t. d. podziałów, wyrażać będą: 5, 10, 15, i t. d. minut. Gdy punkt oznaczony <sup>2</sup>, w podziale prawidła, to jest, punkt odpowiadający Osi (Axis) prawidła, albo perspektywy, schodzi się z podziałem brzegu Kątomierza; liczba stopniów na tym brzegu wyrażoną, zupełnie oznaczają w stopniach wielkość kąta, który czynią dwa prawidła. Ale gdy ten punkt nie schodzi się z podziałem brzegu, kąt którego szukamy, różnić się będzie 5, 10, 15, i t. d. minutami co do wielkości swojej, od liczby stopniów wyrażony przy podziale najbliższym, podług tego, jaki będzie podział prawidła czy pierwszy, czy drugi, czy trzeci i t. d. który się zeydzie z podziałem brzegu.

Aby przez Kątomierz wyznaczyć odległość punktu niedostępnego,

Trzeba naprzód, aby była wymierzona podstawa, położywszy potem Kątomierz, na końcu iednym podstawy, tak aby prawidło nieruchome przypadło na też podstawę, celiuie drugim prawidłem

ru-

ruchomym, do punktu, którego położenie chcę wiedzieć. Toż czynię, i na drugim końcu podstawy; a tym sposobem będę miał dwa kąty wiadome przy podstawie.

Pociągnę dalej na papierze, jakąkolwiek linią, któraby podstawę wyrażała, i zrobię przy niej dwa kąty z obu stron równe kątom uważanym na ziemi. Punkt ten w którym dwa tych kątów ramiona przecinać się będą, pokaże na papierze położenie punktu, którego szukam, i jego odległość od jednego z końców linii wyrażającej podstawę tak się mieć będzie do téżej linii, jak się ma punktu niedostępnego na ziemi odległość, od końca podstawy tamtemu odpowiadającego, do samej podstawy. Pierwszy rysunek z podziałki wyznaczony będzie, a zatem wynajdzie się odległość, żadaną przez proporcją: której trzy pierwsze wyrazy będą wiadome, to jest, jak się ma linia wyrażająca podstawę na papierze, do podstawy na ziemi; tak się ma linia na papierze odpowiadająca odległości, której szukamy, do téżej odległości.

Gdyby dwa takie punkta były niedostępne, których odległości nie wiemy; można by każdego z nich w szczególności wyznaczyć położenie względem linii wymierzonej; i wziętę za podstawę; tak się albowiem mieć będzie linia na papierze

rze wyrażającą podstawę do linii wyrażającej także na papierze położenia punktów dwóch nie dostępných, (który to stosunek wiadomy jest z podziałki); iak się ma podstawa na ziemi wymierzona, do odległości na ziemi dwóch punktów niedostępnych.

Jakążkolwiek zgoła byłaby liczba punktów na ziemi którychbyśmy położenie wyznaczyć chcieli, nie mierząc wszystkich tych odległości, któremi są te punkta oddzielone; można podobnym iak wyżej sposobem i odległość tę wyznaczyć, i położenie każdego z osobna punktu względem podstawy, z której dwóch końców wszystkie te punkta widziane bydz mogły według tego wyznaczyć potem na papierze tak położenia, iako i odległości odpowiadające tamtym punktom.

Można więc będzie tym sposobem odrysować mapę i obszerniejszą sztuki ziemi, którey punkta do tego potrzebne widzialne są z dwóch iakich inszych punktów.

Gdyby zaś nie wszystkie te punkta, których położenia wiedzieć chcemy, były nie dostępne, można w tym razie przenié się do dostępnych, i obrać ieden z nich, lub dwa za nowe punkta stanowiska (punkta stationis) to jest takie, z których położenie inszych punktów, mógłoby bydz

wy-



*Pierwsze początki Miernictwa - 265*

wyznaczone; i znowu wyznaczać położenia tych punktów, które albo z jednego tylko z pierwszych punktów stanowiska, albo z żadnego nie były widzialne; biorąc zawsze za podstawę odległość dwóch punktów, których położenie już wyznaczone jest przez rysunek. Można podobnym sposobem działać to rozciągając, i do odrysowania miejsc obszerniejszych.

Lubo przepisy tu podane, są z siebie dokładne i jasne; atoli w wykonaniu ich, wielkiey baczności przykładać należy: bo inaczej, tym większe będą w rozmiarach błędy, i uchybienia, im odległości do miernictwa podane, są znacznieysze, i działania w nich bardziey zawiste iedne od drugich. Nie będziemy się tu bawić nad podawaniem drobnieyszych w tej mierze uwag, i służących tym tylko ucznióm szczególniey, których powołanie wezwie w czasie, do pilnowania z Urzędu takowych działań, Znaydą ci bardzo dobre do tego się ściągające nauki, w różnych Książkach, między inszemi w trzeciemy Kiedze pod tytułem *Institutiones Mathematicae* przez X. Metzburga. w Wiedniu 1777. wydany.

300. Tego się szczególniey w podobnych rozmiarach strzedz potrzeba, aby, tak te kąty, które uważamy przy punktach stanowiska nie były bardzo ostre, iako i te,

któ-

które sobie wystawić w myśli można przy punktach, których położenia szukamy, i które zawarte byłyby między dwiema liniami prowadzącemi od punktów dwóch staćcy do tamtych punktów. Dlatego podstawa powinna być tym większa; im większa odległość, której szukamy, i położenie punktów takie, aby prostopadłe od nich spuszczone, ile możności, przypadały na podstawę nie przedłużoną, albo przynajmnięj mało co przeciągnioną. Małe uchybienie w kącie; przy podstawie, pociągając za sobą tym większe uchybienie w bokach; im większe są nie tylko te same boki, ale i ich kwadraty; a zatem, gdy kąty przy podstawie są bardzo ostre, albo też, gdy ich summa nie wiele się różni od summy dwóch kątów prostych, w takim razie trzeba odmierzyć jedno, lub oba dwa stanowiska. A jeżeliby między punktami, których położenie i odległość już jest wyznaczona, nie znajdowały się dwa inne takie, aby linią łączącą je zdatną była do wyznaczenia innych punktów pozostałych, trzeba w takim razie brać punkt jakikolwiek, mogący wygodnie służyć za stanowisko, z ostrożnościami, wyżey wspomnianemi; choćby nam z siebie nie był potrzebny do tego celu, któryśmy sobie szczególniej założyli.

Gdy w działaniach wchodzić muszą takie wymiary, z których jedno zawisły od drugich; należy przynajmnięj być za-

pe-

pewnionym, że w ten związek działań nie wplątały się błędy, z których rozmnożenia urosłoby, znaczniejsze iakie uchybienie.

Przeto można w rzeczy samej wymierzyć odległość jedną z tych, których doszliśmy z przeniesienia figury na papier, i uważać, czyli się nie różni od téj, która wyznaczona była przez proporcya której dwoma wyrazami były dwa boki na papierze, trzecim podstawa na ziemi, a czwartym odległość szukana; albo też wynalezioną odległość dwóch punktów, wziąć za podstawę i szukać z nięj położenia końca jednego z dwóch, pierwszy podstawy, tak właśnie, iak gdyby ta była nam jeszcze niewiadomą; a gdy się okaże, że z tego powtórnego działania wypadnie to położenie punktu, co z pierwszego, albo mało co różnić się będzie, można to mieć za dowód dość pewny, że w ciągu działań nie było uchybienia, przynajmniej znaczniejszego: ponieważ z dwójakięgo takiego działania, iednakowé położenie wypaśćby inaczej nie mogło, chyba żeby ieden błąd poprawił, a bardziey nagroził drugi: co się rzadko trafia.

Jakażkolwiek iednak ostrożność będzie i dokładność w działaniach na gruncie, czyli to w wymierzeniu podstawy, czyli w braniu kątów, przenoszenie ato-

li na papier tych działań, będzie podlegać wielkim niepewnościom.

Trudność ta ostatnią stąd szczególniej wynika; że pewną liczbę stopniów brać przychodzi na przenośniku, albo cyrku proporcjonalnym. Na tych zaś dwóch narzędziach, ciężko jest wyznaczyć liczbę stopniów, a niepodobną wyznaczyć liczbę minut, które się pospolicie w kącie danym znajdują. Nuż tedy uchybienie będzie w połowie tylko stopnia, albo 30. minutach; ten nie wielki na oko błąd, pociągnie za sobą inszy większy w liniach, których długość różnić się stąd będzie od prawdziwej, zostą, zostą, a czasem i rotą częścią tychże samych linii; a ten błąd tym większe uchybienie w długościach, czyli wielkościach linii sprawi; im mniejszą względem nich była ta linia, którą wzięliśmy za promień. Źródło to omyłek maiey wpływać będzie w takowe uchybienia, gdy już nam skądinąd wiadome są długości boków należących do Figur, które rysować mamy: a te długości są pospolicie zamiarem szczególniejszym działań mierzniczych. Gdyby na przykład: trafiło się, żeśmy w pół linii lub w całej linii uchybili, biorąc na podziałce iakakolwiek długość; omyłka ta, która stąd wyniknie, względem położenia na papierze linii, figur iaką zamykających, będzie tym mniejszą; im dłuższe były linie, któreśmy przenosili. Szu-

Pi  
S  
stkie  
było  
żały  
boki  
by m  
moca  
tym,  
iąc te  
w ką  
całego  
znalez  
pozost  
nie w

Cz  
przepi  
tryą,  
tego,  
Tróyk  
rachow  
tów  
część  
zwanę  
ią bar  
która  
łacińsk  
iako to  
chinaci  
nauki  
nomii  
tego  
zastan

Szukano więc sposobu, aby wszystkie działania na gruncie, tak można było przenieść na papier, żeby te wyrażały się w takich Trójkątach, których boki byłyby nam wiadome, to jest, żeby można odrysować na papierze z pomocą samej podziółki, figury podobne tym, któreśmy na gruncie uważali. Mając tedy daną liczbę ilości w liniach lub w kątach, dostateczną do wyznaczenia całego Trójkąta, szukano sposobów, i znaleziono je, iakby stać doysść ilości pozostałych w liniach i kątach ieszcze nie wyznaczonych.

Część Ziemiomierstwa, która na to przepisy dała, nazywają się *Trygonometrią*, albo *Trójkątnictwem*: a to dla tego, że szczególniey rzecz tam iest o Trójkątach, iako tych, od których wyrachowania wszystkich inszych wielokątów wyrachowanie zawisło. Jest to część náyznakomitszą Matematyki, nazywaney (*Mathesis pura*): przystósować ją bardzo często można do Matematyki, którą nazywać można *Mieszaną*, idąc za łacińskiem nazwiskiem (*Mathesis mixta*): iako to do Mechaniki, albo nauki o machinach, czyli silniach: do Optyki, albo nauki o widzeniu, a náywięcéy do Astronomii, czyli nauki Gwiazdarskiej: i dla tego ta część szczególnieyszey uwagi i zastanowienia się Uczniów wyciągá.

Przy-



## Przygotowanie do Rozdziału następującego o Logarytmach.

Ponieważ o Logarytmach dokładniej mówić się potem będzie; tu tyle tylko o nich powiemy, ile potrzeba umieć, aby je przystosować można do rozwiązania reguły trzech, i wyciągnięcia pierwiastku kwadratowego.

301. Logarytmy, są to liczby odpowiadające liczbom całkowitym, i następnym, 1, 2, 3, 4, 5, 6, itd. w ten sposób, że te pierwsze liczby, czyli Logarytmy, iedne do drugich dodane, odpowiadają tym ostatnim, gdy są iedne przez drugie rozmnożone.

Jak tak znaydujemy w tablicach logarytmowych przy liczbach

	2.	1	3.
Logarytmy:	0, 301 030 0.		
	0, 477 121 3.		

Jch summa 0, 778 151 3 jest logarytmem liczby 6, która się robi z rozmnożenia 2, przez 3.

W zwy-

Pierwsze początki Miernictwa. 271

W. zwyczajnych tablicach logarytmowych, logarytmy liczb:

10,	-	-	1
	są		
100	-	-	2
1000	-	-	3
10000	-	-	4.
i t. d.		i t. d.	

Logarytmy liczb mniejszych od 10, ale większych od 1, są ułamki dziesiętne nie mające żadnej liczby całkowitej.

Jak tak Logarytmy liczb:

2,	-	0,	301	030	0.
	są				
3,	0,	477	121	3.	
4,	-	0,	602	060	0.
5,	-	0,	698	970	0.
i t. d.		i t. d.			

302. Ponieważ zaś rozmnożenie jakiej liczby przez 1, żadnej odmiany w niej nie sprawia; przeto i dodanie logarytmu jedności, do logarytmu téj liczby, odmieniać tego logarytmu nie powinno; Logarytm więc jedności jest zero albo 0.

Logarytmy liczb między 10, i 100, są jedności z przydaniami ułamkami dziesiętnymi.

Logarytmy liczb między 100, i 1000, między 1000, i 10000, i t. d. są liczby całkowite.

kwitę pierwszych, 2, drugich, 3, i t. d. z przydanemi ułomkami dziesiętnymi

Znak pierwszy logarytmu liczby całkowitej jest częścią nazywaną znakomitszą tegoż logarytmu, ponieważ daie poznać, z jak wielu znaków składa się liczba całkowita, której jest logarytmem. Tak na przykład, znak logarytmu pierwszy: 0, 1, 2, 3, 4, i t. d. daie poznać, iż liczba, której odpowiada, zawiera się między 1, a 10, albo między 10, a 100, albo między 100, a 1000, albo między 1000, a 10000, albo między 10000, a 100000, i t. d. to jest ma w sobie jeden, dwa, trzy, cztery, pięć, i t. d. znaków liczb całkowitych. Dla tego też pierwszy znak Logarytmu nazywa się jego *Céha* (Charactéristica.)

303. Gdy dwa logarytmy, mają jedną kowę ułomki dziesiętne, (d) a céha ich tylko jest odmienna; w takim razie liczby im odpowiadające, są 10, 100, 1000, i t. d. razy większe jedna od drugiej, według tego, jak céha ich logarytmu większa będzie jedna od drugiej, dwiema, trzema i t. d. jednościami; J tak logarytm liczby 20, 200, 2000, i t. d. będzie, 1, 301 030 0. 2, 301 030 0. 3, 301 030 0. i t. d. to jest, będzie ten sam co i Logarytm liczby

---

Tę ułomki w Logarytmie, nazywaia Autorowie piszący po łacinie: *Mantysa*.

*Pierwsze początki Miernictwa. 273*

liczby 2, przydawszy mu Log: liczb 10,  
100, 1000 i t. d.

Trzeba przez kilka przykładów wpra-  
wić Ucznie w to pierwsze działanie; bio-  
rąc takie liczby, któreby nie większe by-  
ły, od największej liczby tablic logary-  
tmowych.

304. Przykład 1. Rozmnożyć 28 przez  
32.

Log: liczby 28 - 1, 447 158 0,  
ieft

Log: 32 - 1, 505 150 0,

Summa Log. - 2, 952 308 0.

J ta Summa powinna być logarytmem  
liczby rozmnożonej z 28 przez 32. Ja-  
koż w tablicach logarytmowych przy lo-  
garytmie, 295 230 80, znajdziemy liczbę  
896; która to liczba wypada w samej rze-  
czy z rozmnożenia 28 przez 32.

Przykład 2. Rozmnożyć trzy liczby:  
16, 24, 26,

Log: 16, - 1, 204 120 0.

Log: 24, - 1, 380 211 2.

Log: 26, - 1, 414 973 3.

Summa Log: 3, 999 304 5.

S J to jest

J toiest logarytm liczby 998 4, która wypada z rozmnożenia trzech liczb: 16, 24, 26.

305. Ponieważ kwadrat iakięy liczby, iest ta sama liczba przez siebie rozmnożona; więc logarytm tego kwadratu, będzie równy logarytmowi liczby z której kwadrat powstał, dwa razy wziętemu.

Przykład 1. Log: 2, - 0. 301 030 0.

Tenże dwa razy wzięty 0, 602 060 0, będzie logarytmem kwadratu z 2, to iest 4.

Przykład 2, Log: 56 1. 748 188 0.  
Dwa razy wzięty: 3, 496 376 0.  
będzie Logarytmem kwadratu z 56, toiest: 3, 136.

306. W dzieleniu, liczba podzielna równa się liczbie dzielącej, przez wieloraz rozmnożonę; a zatem logarytm liczby podzielnej, równa się logarytmowi liczby dzielącej, dodanemu do logarytmu wielorazu; a stąd logarytm tego wielorazu, będzie różnicą między logarytmami liczby podzielonej i dzielącej.

Przykład. 1. Podzielić 6, przez 2,  
Log: 6. 0, 778 151 3.  
Log: 2. 0, 301 030 0.

Różnica 0, 477 121 3, iest logarytmem wielorazu, toiest 3. Przy-



Pierwsze początki Miernictwa 275

Przykład 2. Podzielić 1632 przez 34.

Log: 1632      3,212 720 2

Log: 34      1,531 478 9

Różnica      1,681 241 3. jest  
logarytmem wielorazu toiest. 48.

307. W proporcji: średnie liczby, iedna przez drugą rozmnożone, równe są skrajnym podobnie rozmnożonym, iako się to w Arytmetyce i w Rozdziele o proporcjach wywiodło. Przeto iednę z skrajnych liczb znaydziemy, dzieląc średnie liczby w ten, iak wyżej, sposób rozmnożone, przez drugą liczbę skrajną: a zatém i logarytm liczby iednej skrajnej wynaydziemy, odiawszy od summy logarytmów dwóch liczb średnich, logarytm drugiey liczby skrajnej.

Przykład 1. 35 Robotników, zrobiło 45 sążni pewney roboty, ileż w tym samym czasie zrobi 42 robotników z równą usilnością pracujących?

Log: 42      1,623 249 3.

Log: 45      1,653 212 5.

Summa      3,276 461 8.

Log: 35      1,544 068 0.

S2      Ró-

Różnica  $1.732\ 393\ 8$ . jest logarytmem żądanym, liczby 54.

308. Zamiast odejmowania, któreby należało czynić w logarytmach, używają się wygodnie dodawania w ten sposób: Logarytm liczby dzielącej, a bardziej jego cęcha, odejmuje się od liczby całkowitej 10, i reszta dodaje się do logarytmu liczby podzielnej, a od summy, znowu się 10 odcina.

*Defin.* Różnica logarytmu liczby iakiej od 10. nazywa się *dopełnieniem* (complementum) tego logarytmu.

*Przykład.* Podzielić 6. przez 2.

Log: 6  $0.778\ 151\ 3$ .

Log: 2  $0.301\ 030\ 00$ . Do-  
pełnienie tego log:  $9.698\ 970\ 0$

Summa  $10.477\ 121\ 3$

Log: wielorazu  $0.477\ 121\ 3$ .

jest Log: 3.

Podzielić 1632 przez 34.

Log: 1632  $3.212\ 720\ 2$ .

Log: 34,  $1.531\ 478\ 9$ . Dopełn:

Log: 34,  $8.468\ 521\ 1$ .

Summa  $11.681\ 241\ 3$ .

Log: wielora:  $1.681\ 241\ 3$ .

jest Log: 48.

Ten

Piern

Ten

jest wy-  
odeymo-  
niu, me-  
chunkae-  
Można  
wanu r-  
to odehy-  
do otrzy-  
które si-  
garytmu

Przy

sążni,

Dopełnie

Summa  
zmniejsz

Przyk

1344, a  
zamienić  
którego  
lokci?

L

L

L

R

*Pierwsze początki Miernictwa 277.*

Ten sposób postępowania osobliwiej jest wygodny w Regule Trzech, gdzie odejmowanie następujące, po dodawaniu, mogłoby w długich zwłaszcza rachunkach, omyłki jakieś dać okazją. Można zaś i nie wielką nawet w rachowaniu mając wprawę, na pamięć czynić to odejmowanie, które potrzebne jest do otrzymania dopełnienia logarytmu, które się potem dodaie na miejsce logarytmu odejmować się mającego.

*Przykład 35 Robotników, zrobiło 45 sążni, ileż zrobi 42 rob:?*

$$\text{Log: } 42 \quad 1.623 \ 249 \ 3.$$

$$\text{Log: } 45 \quad 1.653 \ 212 \ 5.$$

$$\text{Dopełnienie Logar: } 35 \quad 8.455 \ 932 \ 0.$$

Summa której cécha

$$\text{zmniejszona liczbą 10. } 1.732 \ 393 \ 8.$$

*Przykład 2. Bok jeden prostokąta ma 1344, a drugi 1445 łokci. Trzeba go zamienić na inszy prostokąt temu równy, którego bok jeden ma zawierać 1440 łokci?*

$$\text{Log: } 1344 \quad 3.128 \ 399 \ 3$$

$$\text{Log: } 1445 \quad 3.162 \ 863 \ 0$$

$$\text{Summa} \quad 6.291 \ 262 \ 3.$$

$$\text{Log: } 1440 \quad 3.158 \ 362 \ 5.$$

$$\text{Różnica} \quad 3.132 \ 899 \ 8. \text{ jest}$$

Logary-

Logarytmém liczby, który szukaliśmy to jest 1358.

309. Ponieważ Logarytm Kwadratu, dwa razy jest większy, niż Logarytm pierwiastku; przeto Logarytm pierwiastku; jest połową logarytmu kwadratu. Aby tedy wyciągnąć z liczby pierwiastek kwadratowy; trzeba wziąć połowę logarytmu téj liczby.

Przykład 1. Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z 4.

Log: 4 - 0.602 060 0.

Połowa - 0.301 030 0. jest logarytmém pierwiastku, to jest 2.

Przykład 2. Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z 7569.

Log: 7569. - 3.879 038 5.

Połowa - 1.939 519 2. jest logarytmém pierwiastku, to jest 87.

Przykład. 3. Boki prostokąta są: 378, i 672, iakiż będzie bok kwadratu iemu równego w powierzchni?

Log: 378 - 2.577 491 8.

Log: 672 - 2.827 369 3.

Summa - 5.404 861 1.

Poło-

*Pierwsze początki Miernictwa 279*

Półowa  $2.702\ 430\ 5$ . jest logarytmem liczby szukaney toiest  $504$ .

310. Co się tycze logarytmów ułomków dziesiętnych.

Niech będzie liczba n p.  $1764$ , który logarytm:  $3.246\ 498\ 6$ . Podzieliwszy tę liczbę przez  $10$ , logarytm wielorazu powinien mieć jedną jednością mniej w cęsze swojej ( $303$ .) Logarytm tedy liczby  $176, 4$ , będzie  $2.246\ 498\ 6$ . Podobnie log:  $17, 64$ , będzie  $1.246\ 498\ 6$ . Log:  $1, 764$   $0, 246\ 498\ 6$ .

Dzieląc  $1764$ , przez  $1000$ , logarytm wielorazu, toiest liczby  $1, 764$ , má cęchę mnieyszą  $3$  jednościami, niżeli miał logarytm liczby  $1764$ , nie podzielonéy. Gdyby tedy przyszło,  $1764$  dzielić przez  $1\ 000\ 0$ ,  $1\ 000\ 00$ ,  $1\ 000\ 000$ , it. d. Logarytmny wielorazów, toiest ułomków dziesiętnych:  $0, 1764. 0$ ,  $0\ 1764$ ,  $0, 001\ 764$  it. d. powinnyby mieć  $4, 5, 6$ , it. d. jednościami mnieyszą cęchę, niżeli miał logarytm liczby  $1764$ , nie podzielonéy. Że zaś cęcha logarytmu liczby  $1764$ , iest:  $3$ , a cęchy logarytmów liczb:  $1\ 000\ 0$ ,  $1\ 000\ 00$ ,  $1\ 000\ 000$ , it. d. są:  $4, 5, 6$ , it. d. toiest liczby większe od  $3$ , od których ie odeymować przypada; więc dla większey w odeymowaniu wygody uważa się, iakoby cęcha  $3$ , powiększoná była  $10$  jednościami, i dopiero od tak powiększonéy odey-



280 GEOMETRYI. C. I. ROZDZIAŁ XI.

odeymnia się céchy liczb dzielących:  
 $1\ 000\ 0$ ,  $100\ 000$ ,  $1\ 000\ 000$ . it. d. to jest  
 céchy: 4, 5, 6, it. d. pamiętając zawsze  
 na to przydanie i zmniejszanie znówu re-  
 sztę, to jest, logarytm wielorazu tąż lic-  
 bą: 10; będzie więc  $\log \frac{1\ 764}{1\ 000}$ , albo 0, 1 764  
 $= 13, 246\ 498\ 6 - 4\ (e) = 9, 246\ 498\ 6$ ,  
 to jest dla dodanych 10, do céchy 3, będzie  
 w saméy rzeczy  $= 9, 256\ 498\ 6 - 10$ .  
 Tak też Log: 0, 017 64, będzie  $= 8, 246\ 498\ 6$ .  
 $6 - 10$ . log. 0, 001 764. będzie  $= 7,$   
 $246\ 498\ 6 - 10$ . it. d.

Przykład 1. Rozmnożyć 24 przez 0, 5.

$$\text{Log: } 24 = 1,380\ 211\ 2.$$

$$\text{Log: } 0,5 = 9,698\ 970\ 0. - 10.$$

Summa  $= 1,079\ 181\ 2. = \text{Log:}$   
 12, to jest liczby wypadającej z rozmno-  
 żenia 24 przez 0,5.

Przykład 2. Rozmnożyć 24 przez 0, 05.

$$\text{Log: } 24 = 1,380\ 211\ 2.$$

$$\text{Log: } 0,05 = 8,698\ 970\ 0. - 10.$$

Summa  $= 0,079\ 181\ 2.$  jest loga-  
 rytmem liczby rozmnożonej.

Ten

---

(e) Znak — kładzie się przed tą ilością  
 n p. przed tą liczbą, która má być od dru-  
 giéy odjęta.

### Pierwsze początki Miernictwa 281

Ten logarytm nie znayduie się w tablicach logarytmowych z cęchą, 0, ale się znayduie z cęchą 1, i odpowiada mu liczba: 12; a zatem liczba, której szukaliśmy, będzie 10 razy, mnieyszą toieft: 1, 2.

Przykład: 3. Podzielić 32 przez 0, 5.

$$\text{Log: } 32 = 1,505\ 150.0.$$

$$\text{Log: } 0,5 = 9,698\ 970.0. - 10.$$


---

Reszta. 1.806 1800 iest logarytmem wielorazu, toieft liczby 64.

Odeymuiąc 9.698 970 0, od 1,505 150 0, odeymowalibyśmy 10 razy więcej, niż potrzeba; więcby to 10 do reszty przydadź należało. Na iedno zaś wyydzie, gdy tę 10, któremu iest powiększoną liczba mającą się odeymować, przydamy też i do liczby, od której ją odeymować przypadá, toieft, gdy odeymuiemy 9,698 970 0 od 1,505 150 0.

Przykład 4. Podzielić 144, przez 0, 06.

$$\text{Log: } 144 = 2,158\ 362\ 5.$$

$$\text{Log: } 0,06 = 8,778\ 151\ 3. - 10.$$


---

Różnica 3,380 211 2. iest logarytmem wielorazu, toieft liczby: 2400.

282 GEOMETRYI C. I. ROZDZIAŁ XI.

Co do ułomków zwyczajnych.

311. Ponieważ ułomek uważać można, jako oznaczający dzielenie licznika jego przez mianownika; będzie zatem logarytm ułamka równy różnicy między logarytmem licznika jego i mianownika.

Niech będzie na przykład, ułomek nie właściwy  $\frac{7}{5}$ .

$$\text{Log: } 7. - 0,845\ 098\ 0.$$

$$\text{Log: } 5. - 0,698\ 970\ 0.$$

$$\text{Różnica} = 0,146\ 128\ 0 = \text{Log: } \frac{7}{5}.$$

Można się o tem przekonać używszy ułamka dziesiętnego zamiast ułamka  $\frac{7}{5}$ , będzie albowiem  $\frac{7}{5} = \frac{14}{10} = 1,4$ .

$$\text{Log: } 14. - 1,146\ 128\ 0.$$

$$\text{A zatem Log: } 1,4. - 0,146\ 128\ 0.$$

312. Gdyby ułomek był właściwy, to jest gdyby licznik jego był mniejszy od mianownika; w takim razie logarytm licznika byłby też mniejszy od logarytmu mianownika. Aby więc można odjąć logarytm mianownika od logarytmu licznika;

Pierwsze początki Miernictwa 28;  
 ka; pożyczamy 10. temu logarytmowi  
 iak wyżej (310) w podobnym przypadku.

Przykład 1. Niech będzie ułamek:  $\frac{2}{5}$ .

$$\text{Log: } 2 = 0,301\ 030\ 0.$$

$$\text{Log: } 5 = 0,698\ 970\ 0.$$

$$\text{Log: } \frac{2}{5} = 9,602\ 060\ 0. - 10.$$

Przykład 2. Trzeba znaleźć Log:  $\frac{7}{15}$

$$\text{Log: } 7 = 0,845\ 098\ 0.$$

$$\text{Log: } 15 = 1,176\ 091\ 3.$$


---

$$\text{Log: } \frac{7}{15} = 9,669\ 006\ 7. - 10.$$

Przykład: Trzeba znaleźć log:  $\frac{1}{25}$

$$\text{Log: } 1 = 0,000\ 000\ 0.$$

$$\text{Log: } 25 = 1,397\ 940\ 0.$$


---

$$\text{Log: } \frac{1}{25} = 8,602\ 060\ 0. - 10.$$

Zdaie się, iżby przystało używać odmiennego iakiego znaku céchy, gdy ta należy do logarytmu odpowiadającego ułomkowi, aby ią zaraz na weyrzrzenie rozznac można od céchy logarytmu, który liczbie całkowitey odpowiada.

313. Kiedy logarytm iaki, nie znayduie się w Tablicach, można wtedy liczbę, któryę odpowiada, wyznaczyć, albo z zupełną dokładnością albo z małym uchybieniem.

Przykład 1. Jakiż iest wieloraz 5, przez 4 podzielonych?

Log: 5 = 0.698 970 0.

Log: 4 = 0.602 060 0.

Różnica = 0.096 910 0.

Logarytm ostatni, oznaczający różnicę dwóch pierwszych logarytmów, nie znayduie się w Tablicach ani z cęchą 0, ani z cęchą 1, ale się znayduie z cęchą 2; liczba onemu odpowiadająca iest: 125; ale że ten logarytm ma cęchę 2; więc nasz będzie odpowiadał liczbie 100 razy mniejszey, toiest: 1,25.

Przykład 2. Trzeba znaleźć kwadrat z 299, mając tylko Tablice Log: nie dałey rozciągając się, iak do 10000, toiest takie, których naywiększy Log: iest: 4 000 000 0.

Log: 299 = 2.475 571 2.

Ténże podwoiony = 4.951 342 4.

Drugiego tego logarytmu w tablicach zwy-



*Pierwsze początki Miernictwa 285*

zwyczajnych nie znaydujemy. Zmniejszmy więc jednością cęchę jego: tén Logarytm zmniejszony 3.951 342 4, lubo co do wszystkich liczb swoich, nie znayduie się w táblicach; znaydujemy go jednak co do pierwszych, i mało co większy iest od Log: 3.951 337 5. a mniejszy od 3.951 386 1.

Pierwszy z tych logarytmów znaydujących się zupełnie w Tablicach: iest Log: liczby 8940, a drugi Log: liczby 8941.

A zatem liczba, której szukamy, będzie między 8 940 0. ....  
8 941 0.

Logarytm dany przewyższa logarytm pierwszy Táblicowy liczbą 49; mniejszy zaś iest od drugiego logarytmu Táblicowego liczbą 437. Ta tedy której szukamy liczba, powinna daleko więcej zbliżać się do 8 940 0, niż do 8 941 0.

Widzimy z Táblic, że kilka logarytmów, które następują po logarytmach liczb 8940, i 8941, mają tę samę, co i te logarytmy różnicę, to iest 486, tak, iak i różnica liczb im odpowiadających iest taż sama, to iest 1: a zatem iezeli różnica między logarytmem danym i logarytmem Táblic iemu náybliższym, iest na przykład połową, lub trzecią częścią, lub czwartą, i t. d. różnicy między tym-  
ze

że náybliższym logarytmém, i drugim, zaraz po nim następującym, to też i różnica między liczbą odpowiadającą logarytmowi danému, a liczbą odpowiadającą logarytmowi náybliższemu, będzie prawie połową trzecią częścią, czwartą i t. d. jedności, która jest różnicą między dwiema liczbami naturalnemi, po sobie idącemi. Że tedy różnica 49, jest prawie  $\frac{1}{10}$  częścią różnicy 486; więc i różnica liczby szukaney dla dodatku liczbie 8940, będzie dziesiątą częścią jedności, to jest 0, 1; a zatem liczba odpowiadająca logarytmowi 3.951 342 4, będzie prawie 8940, 1, liczba zaś odpowiadająca Log: 4.951 342 4, będzie, 8 940 1, to jest kwadrat, którego szukaliśmy.

Ponieważ w tym przykładzie szczególnym zakończenie liczby 299 pokazuje, iż kwadrat iey má się kończyć na 1, można było bez tak długiego rozumowania doysść téżę liczby kwadrato-wéy: 8 940 1.

314. Czému różnica dwóch logarytmów po sobie następujących jest tym mnieyszą, im są większe liczby, którym one odpowiadają, można to tak wyłożyć.

Różnica logarytmów dwóch liczb: 10, i 2. jest: 4 575 75. Ró.

### Pierwsze początki Miernictwa 287

Różnica logarytmów dwóch liczb 100, i 90, jest ta sama; (ponieważ  $\frac{100}{90} = \frac{10}{9}$ ;) ale ta rozkłada się na dziesięć inszych mniejszych różnic między logarytmami liczb 90, i 91, 91 i 92, 92 i 93, . . . 99 i 100.

Różnica między logarytmami liczb 900, i 1000, jest znowu ta sama co i między logarytmami liczb 10 i 9. (ponieważ  $\frac{1000}{900} = \frac{10}{9}$ ;) ale ta rozkłada się na 100 mniejszych daleko różnic między logarytmami liczb 900, i 901, 901, i 902, 902, i 903, 999 i 1000.

Podobnie i różnica logarytmów liczb 9000, i 10000, lubo ta sama jest, co między logarytmami liczb 9 i 10; ale się rozkłada na 1000. inszych różnic mniejszych, i. t. d.

315. Używanie logarytmów jest bardzo przydatne w wyciąganiu pierwiastków z ilości nie spółmiernych.

Przykład 1. Trzeba wyciągnąć przybliżony pierwiastek kwadratowy z 2.

Log: 2. - 0.301 030 0.

Połowa tego Log: - 0.150 515 0.

Szukamy tej połowy z cechą 3. Logarytm najbliższy w tablicach będzie:  
3.150.

3,150 449 4, który odpowiada liczbie: 1414. A że ten logarytm jest mniejszy od 3,150 515 0, więc liczba odpowiadająca logarytmowi danemu będzie między 1,414. i 1,415. Kwadraty zaś tych ostatnich liczb są: 1,994 476; i 2,002 305.

Aby pierwiastek bardziej jeszcze przybliżyć do prawdziwego, weźmy różnicę 656, między logarytmem danym, i najbliższym z tablic: i znowu weźmy drugą różnicę 3070 między dwoma tablic logarytmami, danemu najbliższymi. Ułomek  $\frac{656}{3070}$  na dziesiątne części obrócony, będzie miał pierwsze dwa znaki liczebne: 21; a zatem pierwiastek bardziej przybliżony będzie: 1,414 21. Można by i więcej, gdyby kto chciał znaków liczebnych przydać w tym pierwiastku; kończąc dalej dzielenie, a tem więcej pierwiastek ten byłby do prawdziwego przybliżony.

**Przykład 2.** Trzeba znaleźć liczbę przybliżoną do następującego wyrazu:  $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

$$\text{Log: } 5. - 0.698\ 970\ 0; \frac{1}{2} \text{ Log: } 5. - 0.349\ 485\ 0.$$

$$\text{Log: } 2. - 0.301\ 030\ 0; \frac{1}{2} \text{ Log: } 2. - 0.150\ 515\ 0.$$

---


$$\text{Różnica} \quad \quad \quad 0.198\ 970\ 0.$$

Osta-

Ostatni logarytm oznaczający różnicę, odpowiada prawie w tablicach z cechą

przydaną 3, liczbie 1,581, a zatem  $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$  równa się prawie 1,581.

## ROZDZIAŁ XII.

### O Trygonometrii.

316. Wystawmy sobie Trójkąt w koło wpisany. Boki tego Trójkąta byłyby cięciwami łuków przeciwnych jego kątom. A że miarą tych kątów są połowy tychże łuków; więc boki tego Trójkąta będą cięciwami łuków dwa razy większych, niżeli są te, których ważność w stopniach ta sama jest, co i kątów im przeciwnych.

Jdzie zatem, że gdybyśmy mieli ułożoną z figury dokładną, lub z rachunku Tąblicę cięciw do łuków wszystkich koła, zaczawszy na przykład od łuku jednej minuty aż do 180 stopniów (którego to ostatniego łuku cięciwa jest największą) już tem samem i stosunek boków Trójkąta znaleźlibyśmy z danych kątów jego: i wzajemnie (lubo nie tak prosto) doszlibyśmy ważności w stopniach kątów, z danych boków Trójkąta.

317. Aby uniknąć brania połowy, lub wedwójnasób kątów Trójkąta, szukam

T                      za-



zamiast cięnciw inszych linij, do których boki Trójkąta byłiby proporcjonalne, i takich, któreby się właściwie scingaly do katów tegoż Trójkąta. Kat we śródku koła opisanego na Trójkącie, zamykający ramionami swemi ten łuk, którego cięnciwą jest bok ieden tegoż Trójkąta, kat mówię taki, dwa razy jest większy od tego, który przy okręgu koła naprzeciw stoi tegoż boku Trójkąta; a zatem gdybyśmy ten kat we śródku przecięli linią na dwie równé części iedną takową część byłaby równa tamtemu katowi Trójkąta. Bok tenże Trójkąta byłby prostopadły do linii przecinaiącey kat na dwie równé części; a ta linią przecięłaby go na dwie także równé części. Toż samo przytósować można i do inszych dwóch boków tego Trójkąta. W ten sposób wytawiono sobie boki Trójkąta, względem katów im przeciwnych.

§ 118. *Defin.* Wziąwszy łuk koła iakikolwiek; jeżeli od iednego końca tego łuku, spuścimy prostopadłą na promień przechodzący przez drugi koniec tegoż łuku; ta prostopadła ma nazwisko *Sinus* (f) a po Polsku nazwać ją można *Wstawą* tego

(f) Wyraz ten *Sinus* stał podobno ma swój początek. Po łacinie Cięnciwa nazywa się *Inscripta*; a połowa cięnciwy, *semiscripta*, dla skrócenia pisaño może da-

tego  
cem  
dzy  
łuku

N  
BD,  
na pr  
gi leg  
wą t

3  
się p  
razy  
BD, f  
BE, f

3  
od 2,  
pniów  
naw  
cała

3  
kszy  
zmnie  
od 90

waię  
matyc  
go sk  
té dw  
kończ  
potém

tego łuku, że się wstawia między końcem jednym łuku, kąm mierzącego, i między promieniem przez drugi koniec tegoż łuku przechodzącym,

Niech będzie AB łuk koła; prostopadła <sup>Tab. XVIII.</sup> BD, spuszczoła od końca B tego łuku, <sup>Fig. 2.</sup> na promień CA, przechodzący przez drugi jego koniec A, nazywać będziemy *wstawą* tego łuku.

319. *Wniosek 1.* Wstawa łuku równa się połowie cięciwy łuku inszego; dwa razy większego iak na przykład Wstawą BD, łuku BA, równa się połowie cięciwy BE, łuku dwa razy większego BAE.

320. *Wniosek 2.* Wstawy łuków rosną od 0, aż do 90°, a ponieważ wstawa stopniów 90, równa się promieniowi, i jest największą, nazywają się dla tego *Wstawą całkową*. (Sinus totus.)

321. *Wniosek 3.* Wstawy łuków większych od czwartej części okręgu koła, zmniejszają się coraz bardziej zaczawszy od 90° aż do 180°; tak dalece, że Wstawą  
Tz *stosowna* sto-

---

wnię S. Jnr. Przepisujący jakieś dzieło Matematyczne, nie wiedząc znaczenia wyrazu tego skręconego, opuścił punkt oddzielający te dwa wyrazy, i dawszy słowo *Sinus* za kończenie łacińskie, napisał *Sinus*, i stąd potem wzięte podobno było to nazwisko.

stopniów  $180^\circ$  równa się 2. Wstaw zaś każdego łuku większego od  $90^\circ$ , a mniejszego od  $180^\circ$  jest ta sama, która i łuku mniejszego od  $90^\circ$ , a spełniającego łuk pierwszy do  $180^\circ$ . J tak na przykład Wstaw łuku  $100^\circ$ , też sama jest co i łuku  $80^\circ$  wstaw łuku  $120^\circ$  ta sama, co i łuku  $60^\circ$  i t. d. Takowe spełnienie łuku do  $180^\circ$  albo do pół okręgu koła, nazywa się po łacinie *Supplementum arcus*

Co się tycze łuków większych od pół okręgu koła, o tém nie ma potrzeby mówić w tych początkach.

322. *Wniosek 4.* Ponieważ promień na przykład CF, jest Wstawą największą ze wszystkich, czyli Wstawą stopniów  $90^\circ$ , Wstaw zaś od łuku AFb, większego od czwartej części tego okręgu, jest ta sama, co i łuku ab, mniejszego od czwartej części tegoż okręgu; (który to łuk ostatni spełnia pierwszy do pół okręga), idzie zatem, że do ułożenia Tablicy na wstawy łuków dosyć wyznaczyć wstawy tych łuków, które są mniejsze od  $90^\circ$ .

323. *Wniosek 5,* Wstawy łuków podobnych, w kołach odmiennych, tak się mają do siebie, jak tychże kół promienie. Jeżeli tedy mamy Tablicę wstaw podług promienia podzielonego na pewną liczbę części równych; wynaydziemy przez

regułę

regułę trzech i wystawy podobnych trójkątów, podług innego promienia.

324. *Wniosek 6.* Ponieważ kąt we środku, na przykład  $ACB$ , tyle stopniów w sobie zamyka, co i łuk  $AB$ , który go mierzy, i jest mu proporcjonalny; będzie więc wstawą łuku  $AB$ , Wstawą także i kąta  $ACB$ .

Wstawą tedy kąta, jest prostopadła, spuszczone od punktu jakiego w jednym z ramion jego, do drugiego ramienia, biorąc za promień odległość tego punktu od wierzchołka kąta; Cokolwiek zatem powiedziało się o wstawach łuków, wszystko to przytósować można i do wstaw kątów. J tak, Wstawy kątów rosną od 0, aż do wstawy  $90^\circ$ ; która się równa promieniowi, zmniejszają się znowu zaczawszy od wstawy  $90^\circ$ , aż do wstawy  $180^\circ$ . (która jest  $= 0$ ;) i wstawą kąta rozwartego, ta sama jest, co i kąta ostryego, który tamtego spełnia, do  $180^\circ$ .

Wstawy równych kątów, są do siebie, jak linie wzięte za promienie.

A jeżeli dwie linie są wstawami dwóch kątów, względem tegoż samego promienia, czyli Wstawy całej; te linie tak się do siebie mieć będą, jak Wstawy tychże dwóch kątów.

325. *Twierdzenie I.* W każdym Trójkącie boki tak się mają do siebie, iak wstawy kątów przeciwnych tymże bokom.

Tab. XVIII. Niech będzie Trójkąt ABC, bok iego na przykład AC, tak się má do boku BC = iak wstawa kąta B, do wstawy kąta A.

Fig. 2.

*Dowódz: z wykreśleniem.* Na danym Trójkącie opiszmy koło, i poprowadźmy średnicę CD, i cięciwy DA, DB. kąty: BDC, BAC są równe, bo są w okręgu, i zamykają ramionami swemi iednakowy łuk BC. Dla téż przyczyny równe są także i kąty: ADC, ABC. Oprócz tego, kąty: CBD, CAD są proste, bo są w półkole; więc Linie CB, CA, będą wstawami kątów: CDB, CDA względem téż samey wstawy całej, czyli promienia CD; a zatem tak się mieć będą do siebie té linie, iak wstawy kątów A i B.

*Można jeszcze i następującym sposobem tego samego dowieść.*

Opisawszy koło na danym Trójkącie, połowy boków iego, będą wstawami połowy kątów we środku im przeciwnych; a zatem, będą też i wstawami kątów Trójkąta przeciwnych tymże bokom, (biorąc za Wstawę całą, promień tego koła.) Są tedy do siebie połowy tych boków, iak wstawy kątów im przeciwnych: a że połowy tak się mają do siebie, iak ich całości;

więc

więc  
siebie  
ciwny

32  
Wstaw  
kiego  
ków  
wiad  
den to  
możn

3  
blię  
nego  
Ten  
w táb  
niá  
chun  
przo  
tych  
gdzie  
uważ  
iak g  
wny  
gdyb  
li p  
cza  
częs  
bny  
loga  
10,  
w s  
kaia



więc też i całe boki Trójkąta, tak się do siebie mieć będą, iak wstawy kątów przeciwnych tymże bokom.

326. *Wniosek.* Za pomocą Táblicy na Wstawy ułożony podług promienia iakiegokolwiek, można doysść stosunku boków Trójkąta, którego kątów są nam już wiadome; a zatem, gdy jeszcze i bok jeden tegoż Trójkąta jest wiadomy: będzie można znaleźć i dwa insze jego boki.

327. Jakoż rachowano i ułożono Táblicę Wstaw podług promienia podzielonego np. na 100 000 części równych. Tén a nie większy podział, zwłaszcza w táblicach do zwyczajnieyszego używania ułożonych, znayduie się. Zeby zaś rachunek krótszym i łatwieyszym uczynić, przydano i táblicę logarytmów, Wstaw tychże. W takowych jednak táblicach, gdzie i logarytmy wstaw znayduią się, uważano promień, albo wstawę całą, iak gdyby na 10 000 000 000 części równych była podzieloną, a zatem, iak gdyby logarytm iey, miał za cęchę czyli początek wá liczbę: 10, która oznacza, iż wstawa zawiera w sobie liczbę części równych złożoną z znaków liczebných iednym więcej; tak, iak cęchá logarytmu wstawy całej, toiest, liczba: 10, oznacza, iż wstawa całą zamyka w sobie znaków liczebných 11, zamykając części równych: 10 000 000 000.

Nie

Nie wykłada się teraz iak ułożone są te tablice; podany tylko będzie sposób ich używania. W tablicach tych znajdujemy na dwóch kartach lednéj obok drugiey, w dwóch różnych słupach czyli kolumnach, Wstawy dwóch kątów, których summa czyni kąt prosty, albo  $90^\circ$ . Tablica tych wstaw po lewéy ręce kart, rozciąga się od  $0$ , aż do  $45^\circ$ . Tablica zaś po prawéy ręce idzie wspak od  $90^\circ$ , aż do  $45^\circ$ . Te kąty których stopnie wyrażone są po prawéy ręce, nazywają się *dopełnieniem* tamtych (*complementum*) do  $90^\circ$ ; a ich wstawy *wstawami dopełnienia* (*sinus complementi*) czyli króćcy, *Dostawami* (*Cosinus*.)

328. Summa kwadratów, z Wstawy i z dostawy łuku, albo kąta równa się kwadratowi promienia, czyli wstawy całej.

Tab. XVIII. Bo ponieważ dwa łuki, n. p. AB, i FB, (albo dwa kąty: ACB, i FCB) są dopełnieniem ieden drugiego; Wstawa BG, łuku FB, równa iest linii CD; kwadrat zaś linii CD z kwadratem wstawy BD równa się kwadratowi promienia BC; więc i summa kwadratów z BG i BD, równa będzie kwadratowi promienia BC.

329. Przystosowanie. Mając na polu wymierzoną podstawę, i kąty które czyni podstawa z dwiema liniami wyk-

ro-

rowaniami ku jednemu celowi, znaleźć tych ostatnich dwóch linii długość?

Niechby Trójkąt ABC, wyrażał Trócy-Tab. XVIII. kąta na polu zawarty między podstawą Fig. 3. wymiersoną i dwiema liniami dążącemi ku jednemu celowi.

$$\text{Niech będzie } AB = 1200$$

$$A = 50^\circ$$

$$B = 72^\circ$$

$$\text{więc } A+B = 122^\circ$$

$$\text{a zatem } 180^\circ - (A+B) = 58^\circ = C$$

Wstawia kąta C: Wstawia kąta A = AB:

$$BC : \text{wsta: } C : \text{wsta: } B = AB : AC$$

$$\text{Log: } AB = 3,079\ 181\ 2.$$

$$\text{Log: wst: } A = 9,884\ 254\ 0.$$

$$\text{Summa} = 12,963\ 435\ 2.$$

$$\text{Log: wst: } C = 9,928\ 420\ 5.$$

$$\text{Różnica} = \text{Log: } BC = 3,035\ 014\ 7.$$

$$A \text{ zatem bok } BC = \text{prawie } 1084.$$

Z pierwszemy tedy proporcji znaydziemy bok BC, dodając do siebie logarytmu wstawy A, i boku AB, a odiawszy od ich summy, logarytm wstawy C; różnica albowiem dwóch logarytmów ostatnich, pokazuje logarytm boku BC. który bok w tablicy osobney logarytmów liczb; znaydziemy przy tymże logarytmie = 1083, 96. to jest prawie = 1084.

Po-

Podobnym sposobem znaydziemy z drugiej proporcji, i drugi bok  $AC = 1345,76$ .

Dla skrócenia rachunku, można z początku zaraz odiać logarytm wstawy kąta C, od logarytmu liczby wyrażającej bok AB, dodawszy do cechy tego drugiego logarytmu liczbę: 10 (co na pamięci mieć potrzeba:) Powszechnie zaś dodając osobno logarytmy wstaw kątów A i B, do logarytmu liczby wyrażającej bok AB, dochodziemy dwóch boków innych.

Można także wygodnie użyć w rachunkach Trygonometrycznych dodawania, zamiast odejmowania, kładąc dopełnienia logarytmów. (g) na miejsce tych, które przez nich są dopełnione.

J tak w pierwszym przykładzie, ponieważ wstawa kąta C, jest pierwszym wyrazem proporcji, z której szukamy boków AC, albo BC; podstawa zaś AB jest jednym z wyrazów średnich, a drugim wstawą kąta A, lub B; jeżeli tedy do logarytmu podstawy AB, dodamy do-

---

(d) Dopełnieniem logarytmu nazywają się ta liczba, która z nim razem czyni logarytm promienia, jak na przykład,  $0,0715795$  z logarytmem wstawy C  $9,9284205 = 10,000000$ .

dopełn  
ta sum  
wstaw  
mem  
ko log

Przy  
wy

Summa  
szona  
Log: 1

Wi  
dów U

33  
bok i  
chnią

Ni  
Trójk  
ty i p  
chni t  
padła

Wię

dopełnienie logarytmu wstawy kąta C; ta summa dodana jeszcze do logarytmu wstawy kąta A, lub B, będzie logarytmem boku BC, albo AC, odiawszy tylko logarytm promienia.

Przykład. Dopełnienie logarytmu wstawy - C = 0,071 579 5.

$$\text{Log: AB} = 3,079 181 2.$$

$$\text{Log: wst: A} = 9,884 254 0.$$

Summa zmniejszy-

$$\text{szona liczbą 10.} = 3,035 014 7 =$$

Log: BC.

Więcej jeszcze podobnych przykładów Ucznióm podać należy.

330. Przytł. 2. Mając dane kąty, i bok jeden Trójkąta, znaleźć powierzchnią jego przez jedną proporcją.

Niech będzie ten sam, co wyżej, Trójkąt, którego wiadome nam są kąty i podstawa AB: szukamy powierzchnię tego Trójkąta, spuściwszy prostopadłą CD.

$$\text{Wst: C: Wst: A} = \text{AB: BC.}$$

$$\text{Promień: Wst: B} = \text{BC: CD.}$$

$$\text{Więc P: + Wst: C: wst: A + wst: B}$$

$$= \text{AB: CD.}$$

$$= \text{AB}^2: \text{AB.} + \text{CD}$$

$$= \text{AB}^2: 2. \text{ Powierzchni}$$

A za-



300 GEOMETRII C. I. ROZDZIAŁ XII.

A zatem, z Pr. + wst. C: wst. A +  
wst. B =  $AB^2$ : Powierzchni.  
Log.  $AB = 3.079\ 181\ 2.$

Logarytm ten dwa razy wzięty =

$$\text{Log. } Ab^2 = 6, 158\ 362\ 4.$$

$$\text{Log. Wst. A} = 9, 884\ 254\ 0.$$

$$\text{Log. Wst. B} = 9, 278\ 206\ 2.$$

$$\text{Summa} = 26, 020\ 822\ 7.$$

$$\text{Log. 2} = 0, 301\ 030\ 0.$$

$$\text{Log. Wst. C} = 9, 928\ 420\ 5.$$

$$\text{Log. Pr.} = 10, 000\ 000\ 0.$$

$$\text{Summa} = 40, 229\ 450\ 5.$$

Różnica tych dwóch summ:  $5, 791\ 372\ 2$ ,  
jest logarytmem liczby, która oznaczy  
powierzchnią, a ta będzie =  $6\ 185\ 46$ .  
blizko.

Proporcya tá, z której doszliśmy po-  
wierzchni Tróykąta, tak się wyrażá:  
Prostokąt z Wstawy całej, czyli z pro-  
miénia, i z wstawy kąta przeciwnego  
jednému bokowi, tak się má do prostoką-  
ta wstaw dwóch katów przy tym bo-  
ku; iak się má tézże sám bok, do pro-  
stopadłej nań spuszczoney od wierzchoł-  
ka kąta przeciwnego: albo téz, prostokąt  
z katów z promiénia, i z wstawy kąta przy  
wierzchołku, tak się má do prostokąta  
z wstaw dwóch katów przy podstawie;  
iak

iak się  
kąta.

33  
bach d  
niemi  
go Tró

Ni  
ły bok

Sp  
CD; b

Pr. W

A' zató  
Pr. W

To  
iedneg  
prosto  
do po

Ni

Log.  
Log:  
Log.

jak się ma podstawa do wysokości Trójkąta.

331. Przył. 2. Mając dane w liczbach dwa boki Trójkąta, i kąt między niemi zawarty, znaleźć powierzchnią tego Trójkąta przez jedną proporcją.

Niechby W Trójkącie ABC, znane były boki: AB, AC, i kąt A.

Spuśćmy na podstawę AB, prostopadłą CD; będzie

$$\begin{aligned} \text{Pr. Włt. } A &= AC : CD. \\ &= AC \times AB : CD \times AB. \\ &= AC \times AB : 2 \text{ powierzchni} \end{aligned}$$

A zatem

$$\text{Pr. Włt. } A = AC \times AB : \text{powierzchni.}$$

2.

To jest: tak się ma promień do wstawy jednego z kątów Trójkąta, jak połowa prostokąta z dwóch ramion kąta danego, do powierzchni Trójkąta.

Niech będzie AB=384.

$$AC=405.$$

$$A=50^\circ.$$

$$\text{Log. } \frac{1}{2} AB = \text{Log. } 192 = 2,2833012.$$

$$\text{Log. } AC = 2,6074550.$$

$$\text{Log. Włt. } 50^\circ = 9,8842540.$$

Summa

Summą zmniejszoną liczbą 10. (to jest logarytmem promienia)  $= 4,77810102$ , a zatem powierzchnią, której szukaliśmy  $= 9767$ .

Tab. XVIII. 332. *Przyśłós. 4.* Mając dany Trójkąt prostokątny, którego wiadoma jest przeciwprostokątna i jedno ramię kąta prostego, znaleźć inne dwa kąty, i bok trzeci.

Wziąwszy w tym Trójkącie przeciwprostokątną za promień, ramiona kąta prostego, będą oraz wstawami kątów im przeciwnych; a zatem gdyby daną przeciwprostokątną była wyrażona przez 106.000, i znaczyła promień na tyle części równych, podzielony; szukając w tablicach między wstawami, lub dostawami, znaleźlibyśmy liczbę wyrażającą bok drugi dany, a liczba stopniów odpowiadająca tej wstawie, pokazałaby ważność w stopniach, kąta przeciwnego bokowi danemu.

Gdyby zaś przeciwprostokątną, przez inną liczbę była wyrażona, a nie przez tę, która by się równała wstawie całej w tablicach znajdujący się; w takim razie użyćby trzeba następującej proporcji:

$$BC : AC = \text{Pr. wst. } B.$$

$$\text{Niech będzie } BC = 1548.$$

AC

## O Trygonometrii 303

$$AC = 1248.$$

$$\text{Log. } AC = 3,096\ 214\ 6.$$

$$\text{Przydawszy log. Pr.} = 13,096\ 214\ 6.$$

$$\text{Log. BC} = \underline{13,189\ 771\ 0.}$$

$$\text{Różnica} = 9,906\ 443\ 6. =$$

$$\text{Log. Wft. B.}$$

$B = 53^{\circ}, 44'$  — to jest, 53 stopniów,  
i coś mniej niż 44  
minut.

$C = 36^{\circ}, 16'$ , + to jest 36 stopniów,  
i coś więcej niż 16  
minut.

$$\text{Pr. wft. } C = BC - AB.$$

$$\text{Log. } BC = 13,189\ 771\ 0.$$

$$\text{Log. wft. } C = 9,771\ 987\ 2 +$$

Odiawszy Log. promienia będzie tych  
dwóch Logarytmów. Summa = 2,961 758 2  
+ = Log. AB: a zatem  $AB = 915,7 +$

Jeśli tylko samego boku AB, znalezie-  
nie jest potrzebne, można skrócić rachu-  
nek, biorąc sumę logarytmów summy  
i różnicy przeciw prostokątnej, i boku da-  
nego, i dzieląc tę sumę przez 2: które  
to

to działanie na tém się zasadza, że kwadrat boku AB, równa się różnicy kwadratów przeciwprostokątnej BC, i boku drugiego AC; albo (co na jedno wychodzi) prostokątowi z summy ich i z różnicy, toieść prostokątowi z summy  $BC + AC$  i z różnicy  $BC - AC$ . Summa tedy logarytmów summy:  $BC + AC$ , i różnicy  $BC - AC$  będzie logarytmem kwadratu,  $AB^2$ , a zatem połowa téj summy logarytmów, będzie logarytmem Pierwiastku, toieść boku AB.

$$BC + AC = 2796.$$

$$BC - AC = 300.$$

$$\text{Log. } (BC + AC) = 3,4465372.$$

$$\text{Log. } (BC - AC) = 2,4771213.$$

$$\text{Summa} = 5,9236585.$$

$$\text{Połowa} = 2,9618292 = \text{Log. AB.}$$

$$\text{A zatem bok AB} = 915,8+.$$

Porównyując z sobą tę ważność dwoiaką boku AB, która z dwóch odmiennych rachunków wypada, postrzegamy różnicę mnieyszą niż  $\frac{1}{9000}$  całej ważności; którą to różnicę, stąd pochodzi, że w pierwszym rachunku braliśmy kąty

B i C

B i C  
pier

33  
kacie  
bok i  
ramion  
insze l

Nie  
dany i  
iemu p  
ieźć in

Spo  
cyi, B  
my ką  
mę ką

Z d  
= BC:

Spo  
na bok

W T  
régo bo  
zna do  
dwóch

Maia



## O Trygonometrii

309

B i C w. samych stopniach i minutach  
pierwszych nie szukając minut drugich.

333. *Przystós: 5.* Mając dany w Trójkacie roztwartokątnym kąt roztwarty, bok iemu przeciwny, i jedno z dwóch ramion iego, znaleźć drugie ramie i dwa insze kąty?

Niech będzie Trójkąt ACB, którego Tab. XVIII.  
dany jest kąt roztwarty CAB, bok CB Fig. 5.  
iemu przec wny, i ramie jedno AC; zna-  
leźć insze kąty: B i C, i bok AB.

*Sposób 1. postępowania.* Z téy propor-  
cyi,  $BC:AC = \text{Wst. A} : \text{wst. B}$ ; doydzie-  
my kąta B, a odiawszy od  $180^\circ$ , sum-  
mę kątów A i B, reszta pokáže kąt C.

Z drugiey proporcyi,  $\text{wst. A} : \text{wst. C} = BC:AB$ , wiadomy będzie bok AB.

*Sposób 2.* Spuścmy prostopadłą CD, na bok przedłużony BA.

W Trójkacie prostokątnym ACD, któ-  
regó bok AC i kąt A jest wiadomy, mo-  
żna doysdź dwóch boków CD i AD, ze  
dwóch następujących proporcyy.

Pr.  $\text{Wst. A} = AC:CD$ .

Pr.  $\text{Dostawy A} = AC:AD$ .

Mając wiadomą w Trójkacie prostokątnym

katnym, BCD, przeciwprostokątną BC, i jedno ramię prostego ramienia CD, będzie można doysdz (332.) boku BD, od którego odciawszy AD, znaydziemy bok AB.

Przykłady wyżej podane już dosyć objaśnić były powinny, iak dalej sobie w tém działaniu postąpić.

Tab. XVIII. Podobnego sposobu użyć należy gdy  
Fig. 6. kąt ostry jest dany, i bok temu przeciwny większy od drugiego boku danego. Ta tylko jest różnica, że w drugim sposobie postępowania linią AB, będzie summa, a nie różnicą linii BD, AD.

Tab. XVIII. Gdy zaś bok CB, przeciwny katowi danemu A, mniejszy jest od boku danego AC, który służy za ramię temuż katowi; w takim razie wstawa kąta B wynaleziona z proporcji:  $CB : AC = \text{wst. A} : \text{wst. B}$  może być równie wstawą dwóch kątów B, B, jednego ostryego, a drugiego rozwartego, i-tamten spełniajacego do  $180^\circ$ . Podług drugiego sposobu postępowania, linią AB, AB może być summa, albo różnicą linii AD, BD, albo BD: co daje dwa odmiennie Trójkąty: ACB, ACB: które lubo mają w sobie dwa boki dane i kąt ostry także dany; różnią się jednak trzecim bokiem, i dwoma inszemi kątami. Zgadza się to zupełnie z tém, co się już w Geometrii okazało w Rozd. II.

## O Trygonometrii 307

334. *Przystosowanie 6.* Mając daną liczbę boków w wielokątach foremnych, wyznaczyć ważność ich boków względem promienia koła, w które też wielokąty mogą być wpisane.

*Rozwiązanie.* Połowa boku każdego w foremnym wielokącie, w koło wpisane, jest wstawą połowy kąta we środku tegoż wielokąta, wzięwszy za promień, promień koła na tym wielokącie opisanego.

Liczba boków Wielokąta.	Połowy kątów we środku kątów	Wstawy Połowy we środku
3	$60^{\circ}$	86602.
4	$45^{\circ}$	70711
5	$36^{\circ}$	58779
6	$30^{\circ}$	50000
7	$25^{\circ}$	43388
8	$22^{\circ} \frac{1}{2}$	38671
9	$20^{\circ}$	34202
10	$18^{\circ}$	30902
11	$16^{\circ} \frac{4}{11}$	28171
12	$15^{\circ}$	25882
15	$12^{\circ}$	20791
16	$11^{\circ} \frac{1}{4}$	19509
20	$9^{\circ}$	15643
24	$7^{\circ} \frac{1}{2}$	13053
i t. d.	i t. d.	i t. d.

Tę wstawę, dwa razy wziętą, są bokami wielokątów wpisanych w koło, którego promień=100 000.      Uz      Niech-

Niechby był Trójkąt prostokątny, którego wiadome są dwa ramiona kąta prostego; trzeba znaleźć przeciwprostokątną, i dwa insze kąty.

Już się wyżej pokazało, że mając dane dwa boki w Trójkącie prostokątnym, znajduie się przeciwprostokątną, dodawszy do siebie dwa kwadraty tychże boków, i z summy wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy. Ale gdy liczby oznaczające wielkości boków danych, są bardzo wielkie; nie mało czasu trzebaby na podniesienie tych liczb do kwadratu; a że i summa tych kwadratów będzie bardzo wielką, iż z nię pierwiastku kwadratowego wyciągnąć przez logarytmy nie można, a wyciągać go zwyczajnym sposobem długaby pracą była; przeto dla większey wygody, w téj i wielu inszych okolicznościach, wyrachowano w tablicach logarytmów, i insze ieszcze, oprócz wstów, linie:

335. *Defin.* Niech będzie łuk koła iakięgo, a od iednego końca, tego łuku niech będzie prowadzona styczná, tak daleko, aż się spotká z promieniem przedłużonym, i przechodzącym przez drugi koniec tego łuku. Ta część styczney zamkniętá między punktem dotknięcia koła, i promieniem przedłużonym nazywa się *Styczną Trójkątmierską* (*Tangens Trigonometrica*) albo tylko *Styczną* tego łuku.

łuku. Linią zaś zawartą między środkiem koła, i między punktem, gdzie promień przedłużony przecina stycznią, nazywają się *Sieczną Trójkątniejską*. (Secans Trygonometrica) albo tylko *Sieczną* tego łuku.

Jak linie AT, CT są, pierwszą sty.<sup>Tab. XVIII.</sup> czną, a drugą sieczną łuku AB. Jest także pierwszą linią styczną, a drugą sieczną kąta ACB, biorąc za promień linią CA. Ponieważ łuk FB, jest dopełnieniem do 90°, łuku AB: jeżeli tedy poprowadzimy stycznią FP, aż do ich spotkania się z promieniem CA przedłużonym; linią FP, będzie styczną, a CP sieczną dopełnienia łuku AB, a inaczej jeszcze pierwszą nazywają się *Dostyczną* (cotangens), drugą zaś *Dosieczną* (Consecans) łuku AB, <sup>Fig. 1.</sup>

Jak względem wstaw, tak względem stycznych i siecznych, uważano w tablicach, iedne łuki tyle przewyższające 45°, ile drugie, nie dochodzą 45°; uważano zatem i co do stycznych, i co do siecznych, dopełnienia iednych łuków względem drugich.

336. Na przykład, Trójkąty DCB, ACT są podobne; więc.

I. DC: DB=AC: AT, to jest dostawia tak się ma do wstawy; iak promień do stycznej.



2.  $DC: CB=AC: CT$ , czyli dostawa do promienia, iak promień do sieczn-  
néy.

Tak też dla podobieństwa Trójkątów:  $BCG$ ,  $PCF$  będzie.

1. Wstaw do dostawy iak promień do dostycznej.

2. Wstaw do promienia, iak promień do dosieczn-  
néy.

Mając styczne, łatwo można wyrachować dostyczne. Bo, ponieważ podobne są Trójkąty  $ACT$ ,  $FPC$ , będzie,  $AT: AC=CF: FP$ , to jest, promień będzie średnim Geometrycznym między styczną i dostyczną; Logarytm tedy promienia dwa razy wzięty, równa się summie logarytmów stycznej i dostycznej.

337. Styczne rosną, zaczawszy od  $0$ , aż do stycznej  $45^\circ$ , która się równa promieniowi, (bo w tym razie Trójkąt  $ACT$  będzie równoramiennym) i dalej jeszcze rosną aż do  $90^\circ$ , których styczna będąc od promienia  $CF$  równoodległą, nigdzie się z nim nie zeydzie: a zatem większą jest, od wszelkiej długości którąby wyznaczyć można.

Sieczne podobnym, także iak i styczne rosną sposobem.

338. Niechby był Trójkąt iakikolwiek Tab. XIX. prostokątny, na przykład CAB, którego Fig. 1. wiemy w liczbach dwa ramiona kąta prostego CAB.

Wziąwszy za promień, na przykład linią CA, linią AB będzie styczną, a linią CB, sieczną kąta C.

Gdybyśmy tedy mieli linią CA, toieft, promień wyrażony w tablicach przez 100000, liczba stopniów, przy której znaleźlibyśmy liczbę wyrażającą linią AB, czyli styczną, pokazałaby ważność kąta C: i znowu liczba między siecznąmi odpowiadającą kątowi C, oznaczyłaby ważność linii CB.

Gdyby zaś linią AC, nie była w tych liczbach wyrażona, w których wyrażona jest wstawa cała, czyli promień tablic, w takim razie trzeba zrobić dwie proporcye, pierwszą  $AC: AB = Pr. \text{ styczney } C$ , z której dōydzimy ważności kąta C, drugą  $Pr. \text{ siecz. } C = AC: CB$ .

Przykt: Niech będzie  $AC = 8464$ ,  
 $AB = 5678$ .

Logarytm AB z przydanym Log: promienia jest 13, 754 195 4.  
Log: AC 3, 927 575 7.

312. GEOMETRYI C. I. ROZDZIAŁ XII.

Różnica, czyli Log. styczný

$$C = 9,826\ 619\ 7.$$

$$\text{a zatem kąt } C = 33^{\circ},\ 51.$$

$$\text{Log. AC} = 3,927\ 575\ 7.$$

Log. siecz: C (odcia-

$$\text{wszy Lóg. Pr.)} = 0,080\ 661\ 0.$$

$$\text{Summa} = 4,008\ 236\ 7. =$$

$$\text{Log. CB; więc CB} = 10191. +$$

339. Uwaga. Gdyby przyszło wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z summy kwadratów  $AC^2 + AB^2$ , znaleźlibyśmy wartość przeciw prostokątnej BC, większą niż 10192, a mniejszą niż 10193; a zatem nie zgadzającą się z wartością wyżej znaną, 10191 +; co stąd pochodzi, że wyznaczając wartość kąta C, opuścili się minuty drugie, i przestało się na samych stopniach i minutach pierwszych: i to opuszczenie sprawiło, że wartość BC, mniejsza jednością prawie wypadła; ale uchybienie takowe jest bardzo małe, gdyż od prawdziwej wartości różni się tylko mało co więcej jak 10000.

Poprawa téj omyłki taká być może.

Ponieważ różnica między logarytmem styczný C, znanym, i logarytmem tablic najbliższym, jest 874, a różnica dwóch

## O Trygonometrii 313

dwóch logarytmów táblíc mniejszego i większego od logarytmu znalezionej, iest:  $2730^{\circ}$ , więc będzie,  $2730: 874 = 60": 19"$ , a zatem kąt  $C = 33^{\circ} 51' 19"$

$$\text{Log. } AC = 3,927\ 575\ 7.$$

$$\text{Log. siecz. } C$$

$$(\text{odciawszy Log.P.}) = 0,080\ 688\ 0.$$

$$\text{Sum; czyli Log. BC} = 4,008\ 263\ 7.$$

$$\text{więc BC} = 10\ 1924 = 10\ 192,4$$

340. *Przystosowanie.* W Trójkacie, w którym wiadome są dwa boki, i kąt zawarty między niemi, znaleźć bok trzeci, i dwa insze kąty?

Niech będzie Trójkąt ACB, w którym Tab. XIX.  
dane są dwa boki AC, BC, i kąt C, trze- Fig. 2.  
ba stąd doysdź boku AB, i dwóch in-  
szych kątów.

*Rozwiązanie.* Spuściwszy prostopadłą BD, na bok AC, w Trójkacie prostokątnym BCD wiemy przeciwprostokątną BC, i kąt dany C, a zatem doydziemy dwóch boków BD, DC: a że wiadoma także iest podstawa AC; więc odciawszy CD od AC znajdziemy AD; i znowu w Trójkacie prostokątnym ADB z wiadomych dwóch ramion kąta prostego, doysdź będzie można (338) inszych dwóch kątów, i przeciwprostokątnę AB.

Ten

Ten sposób w tym jest nie wygodny, że trzeba cztery uczynić proporcye, aby dojść boku AB. Jako zaś to, co z każdą z pierwszych trzech proporcyy wypadá, wchodzi w czwartą proporcyy, tak i omyłki tam popełniane, tu wpływają.

Ażeby więc w tym, co z ostatnięj proporcyy wypadnie, uniknąć uchybienia, należy iak náydokładniejszy rachunek czynić w trzech pierwszych. J to jeszcze przydadź potrzeba, że w tym sposobie działania szukać się musi dwóch odcinków AD i DC, iako też i wysokości BD, lubo o nie nie masz zapytania.

34. Gdyby przyszło dochodzić samę tylko linii AB, w tym razie możnaby użyć następującego sposobu.

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times CD.$$

A że iest BC:CD=Pr: Dofławy BCD

więc  $2AC \times BC : 2AC \times CD = Pr. Dofł. BCD.$

a zatem  $2AC \times CD = 2AC \times BC \times Dofł. BCD$

Pr.

A stąd  $AC^2 = AC^2 \times BC^2 - 2AC \times BC \times Dofł. BCD.$

Pr.

Ze



## O Trygonometrii 315

Że zaś téy ostatniéy ilości nie można zawsze rozłożyć na innsze mnożące ją ilości; więc przez same logarytmy działania tego wykonać w tym razie nie możemy;

W takowym tedy przypadku, używając się pospolicie następującej proporcyi.

342. *Twierdż:* 2. Summa dwóch boków Tróykata, tak się má do różnicy tychże boków; jak styczná połowy summy dwóch kątów przeciwnych tym bokóm do styczney połowy różnicy tychże kątów.

Trzeba tu naprzód wyłożyć ucznióm, co się rozumie, przez wyrazy téy proporcyi; a w szczególności pokazać im, że stosunek między stycznými połowy dwóch kątów, albo dwóch łuków nie jest ten sam, co między stycznými całych tych kątów albo łuków. Widocznie się to okazuje w tablicach Trygonometrycznych.

Niech będzie Tróykąt ABC, w którym bok AB, mniejszy jest od boku AC; w tym Tróykacie będzie.

Tab. XIX.  
Fig. 3.

$$AC+AB:AC-AB=\text{styczn.} \frac{B+C}{2}:\text{stycz.} \frac{B-C}{2}$$

*Dowódz:* Wziawszy AD=AB, i porciagnąwszy BD. Tróykąt równoramienny ABD, i Tróykąt nie równoramienny ABC, mają kąt spólny A. Więc summa kątów ABD, ADB, równa się summie kątów

tów ABC, ACB; a zatem ieden z kątów Trójkąta równoramiennego, n p. kąt ABD, równa się połowie summy dwóch kątów ABC, ACB Trójkąta ABC. Kąt ABC, większy z dwóch kątów ABC, ACB, składa się z połowy summy, i z połowy różnicy tychże dwóch kątów: a że kąt ABD, jest połową ich summy; więc kąt CBD będzie połową ich różnicy.

Linia DC jest różnicą dwóch boków AC, AB; przeciąwszy ją na dwie równe części w punkcie E, linia CE będzie połową różnicy dwóch boków AC, AB. A że bok większy AC, równa się połowie summy wraz z połową różnicy tychże dwóch boków; więc AE będzie połową ich summy, gdy CE jest połową różnicy; a zatem linie AE, CE tak się mają do siebie, jak połowa summy boków AC, AB, do połowy ich różnicy. Na tém więc całe działanie rozchodzi się, aby pokazać, iż styczne kątów ABD, CBD, tak się mają do siebie, jak linie AE, CE.

Z Punktu A, spuścmy na BD, prostopadłą AF, przedłużywszy ją aż do G. Ponieważ Trójkąt BAD jest równoramiennym; linie BF, FD będą równe; a że też są równe linie DE, CE; więc pociągnąwszy linią FE, podobne będą Trójkąty: BDC, FDE, i linie FE, BC równoodległe; a zatem i Trójkąty AFE, AGC są podobne, będzie więc  $AE:CE = AF:$

AF: F  
linią  
kątów  
więc A  
AC+A

2  
albo na

AC+A

343  
AC, A  
fumma  
gdy ta  
samiem  
dwóch  
styczną  
czwart  
iacey,  
tych c  
wiadom  
tych d  
ich fun  
wę fun  
znaydz  
połow  
że się  
koniec

P

A

A

AF: FG, że zaś wzięwszy za promień linią BF, linie FA, FG. będą stycznymi kątów: FBA, FBG, albo ABD, CBD; więc AE:CE=stycz.:ABD:stycz.:CBD, albo

$$\frac{AC+AB:AC-AB}{2} = \frac{\text{stycz.} \frac{B+C}{2}}{\text{stycz.} \frac{B-C}{2}}$$

albo nakoniec,

$$AC+AB:AC-AB = \text{stycz.} \frac{B+C}{2} : \text{stycz.} \frac{B-C}{2}$$

343. Przyłósowanie I. Gdy dwa boki AC, AB, są wiadome, będzie wiadoma ich summa AC+AB, i ich różnica AC-AB; gdy także wiemy kąt A, wiedzieć tem samem będziemy summe i połowę summy dwóch innych kątów B i C, a zatem i styczną połowy tej summy; więc i czwartego wyrazu proporcji poprzedzającej, to jest, styczney połowy różnicy tych dwóch kątów. dojdziemy: a stąd wiadoma nam będzie i połowa różnicy tych dwóch kątów. Wiedząc zaś połowę ich summy, i połowę różnicy, gdy połowę summy do połowy różnicy dodamy, znajdziemy kąt większy B, a odiawszy połowę różnicy od połowy summy, okaże się kąt mniejszy C. Znajdziemy nakoniec i bok trzeci BC.

Przykł: Niech będzie

$$AC=2452, AC+AB=4296,$$

$$AB=1844, AC-AB=608.$$

$$A=44^\circ \quad B+C=136^\circ.$$

$$B+C=68^\circ.$$

$$\frac{2}{2} = 4296;$$

318 GEOMETRII C. I. ROZDZIAŁ XII.

$$4296: 608 = \text{stycz. } 68^{\circ}: \text{stycz. } \frac{B-C}{2}$$

$$\text{Log. stycz. } 68^{\circ} = 10,393,5904,$$

$$\text{Log. } 608 = \underline{2,783,9036},$$

$$\text{Summa} = 13,1774940.$$

$$\text{Log: } 4296 = \underline{3,6330643}.$$

$$\text{Różnica} = 9,5444297 =$$

$$\text{Log: stycz. } 19^{\circ}.18' + \text{to jest}$$

i coś więcej

$$\frac{B-C}{2} = 19^{\circ}.18'. +$$

$$A \text{ że } \frac{B+C}{2} = 68^{\circ} \text{ więc}$$

$$B = 87^{\circ}.18'. +$$

$$C = 48^{\circ}.42'. -$$

$$\text{Wst: } C: \text{wst. } A = AB: BC$$

$$\text{Log: } AB = 3,2657609.$$

$$\text{Log: wst: } A = 9,841,7713.$$

$$\text{Summa} = \underline{13,1075322}.$$

Log.

I  
Re

A  
tego d  
propo.

L  
L

L

34  
przez  
nie do

Wi  
go tr  
wyzna  
podsta  
né ku  
ści, sz  
chunek

Ni  
rzoná  
XBA,

# O Trygonometrii 4319

Log. wst. C = 9,875 792 7. —

Reszta, to jest Log: BC = 3,231 739 5. +  
BC = 170 5 +

Aby się przeświadczyć o dokładności tego działania szukamy BC, i przez drugą proporcją; wst: B: wst: A = AC: BC.

Log. AC = 3,389,520 5.

Log. wst: A = 9,841 771 3.

Summa = 13,231 291 8.

Log. wst: B = 9,999 517 6. +

Reszta = 3,231 774 2. —

więc BC = 170 5, 2. —

344. Przytósowanie 2. Wyznaczyć przez rachunek odległość dwóch miejsc nie dostępnych.

Widzieliśmy (w Rozd: XI.) że do tego trzeba było wymierzyć podstawę i wyznaczyć kąty, które przy końcach podstawy czynią dwie linie wykierowane ku dwóm punktom, których odległości szukamy. Można doysść i przez rachunek żądany odległości.

Niech będzie AB podstawa wymie- Tab. XIX.  
rzoną, i wyznaczone kąty: XAB i AB, Fig. 4.  
XBA, i BA. Po-



Ponieważ w Trójkącie  $XAB$ , wiemy dwa kąty przy podstawie, odniawszy więc ich sumę od dwóch kątów prostych, albo od  $180^\circ$ , reszta pokaże kąt trzeci  $AXB$ .

Podobnym sposobem dojdziemy i kąta  $AYB$ .

W Trójkącie  $AXB$ , mając wiadomą podstawę  $AB$ , i wszystkie kąty, można doysść dwóch innych boków, a w szczególności linii  $AX$ .

Podobnie i w Trójkącie  $AYB$  z wiadomego boku  $AB$ , i wszystkich kątów, można wyznaczyć dwa inne boki, a w szczególności linią  $AY$ .

W Trójkącie na koniec  $XAY$  znając dwa boki  $AX$ ,  $AY$ , i kąt  $XAY$  między niemi zawarty, (który jest różnicą między kątem wyznaczonym  $XAB$ ,  $YAB$ ;) można doysść linii  $XY$ , toiest, żadaney odległości.

*Uwaga.* Ponieważ wyznaczenie linii  $XY$ , zawisło od linii  $AX$ ,  $AY$ , dokładność też w wyznaczeniu linii  $XY$ , zawisła od téj dokładności, z którą dwie tamté linie były wyznaczone.

Przy-

# O Trygonometrii

321

Przykład. Niech będzie

$$XAB = 77^\circ \text{ więc } AXB = 49^\circ.$$

$$YAB = 42^\circ \quad AYB = 36^\circ.$$

$$YBA = 102^\circ \quad XAY = 35^\circ.$$

$$XBA = 54^\circ.$$

$$AB = 1200.$$

Wsta: AXB: wst: XBA = AB: AX.

$$\text{Log: } AB = 3,079\ 181\ 2.$$

$$\text{Log: wst. XBA} = 9,907\ 987\ 6.$$

$$\text{Summa} = 12,987\ 138\ 8.$$

$$\text{Log. wst. AXB} = 9,877\ 779\ 9.$$

$$\text{Reszta} = 3,109\ 358\ 9 = \text{Lo: AX}$$

$$AX = 1286,35.$$

Wsta. AYB: Wst. ABY = AB: AY.

$$\text{Log. } AB = 3,079\ 181\ 2.$$

$$\text{Log. Wst. ABY} = 9,990\ 404\ 4.$$

$$\text{Summa} = 13,069\ 585\ 6.$$

$$\text{Log. Wst. AYB} = 9,769\ 218\ 7.$$

$$\text{Reszta} = 3,300\ 366\ 9 = \text{Log: AY}$$

$$\text{Więc AY} = 1996,95.$$

$$\text{Znałszy bok AX} = 1286,35.$$

$$AY = 1996,95$$

W Kat

Kąt między temi bokami zawarty XAY  
 $= 35^\circ$

$$\text{Będzie } AX + AY = 3283,30.$$

$$AY - AX = 710,60$$

$$AXY + AYX = 145^\circ.$$

$$\frac{AXY + AYX}{2} = 72^\circ \frac{1}{2}.$$

Więc (podług Twierdż: 2. §. 342)

$$\frac{3283,3 : 710,6 = \text{Stycz: } 72^\circ \frac{10}{2} : \text{Stycz: } -}{AXY - AYX}$$

$$\text{Log. Stycz: } 72^\circ \frac{10}{2} = 10,501\ 277\ 7.$$

$$\text{Log. } 710,6 - = 2,851\ 625\ 2.$$

$$\text{Summa} = 13,352\ 902\ 9.$$

$$\text{Log. } 3,283\ 3 = 3,516\ 310\ 6.$$

$$\text{Różnica} = 9,836\ 592\ 3. = \text{Log.}$$

$$\text{Stycz: } 34^\circ 28'.$$

$$\text{Więc } \frac{AXY - AYX}{2} = 34^\circ 28'.$$

$$\text{A że jest } \frac{AXY + AYX}{2} = 72^\circ 30'.$$

$$\text{Więc } AXY = 106^\circ 58'.$$

$$AYX = 38^\circ 2'.$$

Ma-

## O Trygonometrii 323

Mając wiadome wszystkie Kąty w Trójkacie XAY, i procz tego dwa boki: AX, AY; znajdziemy bok trzeci XY, to jest odległość, której szukamy; a to przez jedną z tych dwóch proporcyy.

$$\text{Wst. AYX} ; \text{Wst. XAY} = \text{AX} : \text{XY}$$

$$\text{Albo; Wst. AXY: Wst. XAY} = \text{AY: XY.}$$

Szukamy boku XY, przez pierwszą na przykład proporcją; będzie

$$\text{Log. AX} = 3,109\ 358\ 9.$$

$$\text{Log: Wst. XAY} = 9,758\ 591\ 3.$$

$$\text{Summa} = 12,867\ 950\ 2.$$

$$\text{Log. Wst. AXY} = 9,789\ 665\ 2.$$

$$\text{Różnica} = 3,078\ 285\ 0 = \text{Log. XY.}$$

$$\text{Więc XY} = 1197,525.$$

Zostało jeszcze, do rozwiązania ten przypadek, w którym z trzech boków danych w Trójkacie, szukamy kątów jego.

Sposób zwyczajnie używany, zawisł na tem, aby szukać dwóch odcinków podstawy oddzielonych przez prostopadłą, na tę podstawę spuszczoną, od wierzchołku kąta ię przeciwnego.

324 GEOMETRII C. I. ROZDZIAŁ XII.

345. *Twierdź. przybrane.* Podstawa Trójkąta, tak się ma do summy dwóch boków jego, jak różnica tychże boków, do różnicy odcinków podstawy.

Tab. XIX. Niech będzie Trójkąt ABC, w którym z wierzchołka C, spuszczone jest prostopadła CD, na podstawę AB; w tym Trójkącie,  $AB:BC+AC=BC-AC:BD-AD$ .

Od punktu C, jak od środka, promienniem CA nakerślmy koło, które przecnie podstawę AB w punkcie G, bok BC, w punkcie F, a tenże przedłużony, w punkcie E.

Będzie zatem

$$BE = BC + AC \text{ (bo } AC = CE \text{)}$$

$$BF = BC - AC \text{ (bo } AC = CF \text{)}$$

$$BG = BD - AD \text{ (bo } AD = DG \text{)}$$

A ponieważ sieczne BA, BE od jednego punktu B wychodzą, więc (231)  $BA:BE=BF:BG$ , to jest, tak się ma podstawa BA do summy dwóch boków  $=BE$ , jak się ma różnica tychże boków  $=BF$ , do różnicy BG odcinków, które czyni prostopadła CD spuszczone z wierzchołka kąta C na Podstawę,

346. *Przystosowanie.* Ponieważ odcinków BD, AD, wiemy summy i różnicę; wie-



# O Trygonometrii

wiedzieć będziemy i każdy z nich z osobna, iako to już się wyżej pokazało: będzie albowiem większy odcinek  $BD = AB + BG$ , a mniejszy  $AD = AB - BG$ .

A że,  $BC: BD = \text{Pr. Dost: } B$ .

A zaś  $AC: AD = \text{Pr. Dost: } A$ .

Więc dojdziemy i kątów  $B$ , i  $A$ .

Przykład: Niech będzie

$$AB = 1200.$$

$$BC = 935.$$

$$AC = 612.$$

$$BC + AC = 1547.$$

$$BC - AC = 323.$$

$$\text{Log: } BC + AC = 3,189\,490\,3.$$

$$\text{Log: } BC - AC = 2,509\,202\,5.$$

$$\text{Summa} = 5,698\,692\,8.$$

$$\text{Log: } AB = 3,079\,181\,2.$$

$$\text{Reszta} = 2,619\,511\,6.$$

Więc  $BD - AD = 416,4$ . bardzo blisko.

$$AB = 600.$$

$$BD - AD = 208,2$$

$$\text{Summa} = 808,2 = BD.$$

$$\text{Różnica} = 391,8 = AD.$$

$$BC: BD = \text{Pr. Dost: } B.$$

Log:

326 GEOMETRYI. C. I. ROZDZIAŁ XII.

1-t.  
H.

Log: BD z przydanym Log: Pr. =

12, 907 518 8.

Log: BC = 2, 970 811 6.

Reszta = 9, 936 707 2 = Log: Dost: B.

Więc Kąt B. =  $30^{\circ} 11' 15''$ .

AC: AD = Pr: Dost. A.

Log: AD = 2, 593 064 4.

Log: Pr. = 10, 000 000.

Summa = 12, 593 064 4.

Log: AC = 2, 786 751 4.

Reszta = 9, 806 313 0 = Lo: Dost. A

więc Kąt A =  $50^{\circ} 11' 37''$ .

C = 99 37 8.

Dla zapewnienia się o tem, można szukać, jeżeli stosunek Wstaw Kątów: A, i B, równa się, iak powinien, stosunkowi boków im przeciwnych, będzie zaś w samey rzeczy równał się, gdy w proporcji, którey trzema pierwszemi wyrazami będą: BC. AC. Wst. A. za czwarty wyraz wypadnie Wstawa Kąta B, téż samy, co wyżey ważności.

Log: Wst: A = 2, 885 481 1.

Log: AC = 2, 786 751 4.

Summa = 12, 672 232 5.

Log:

$$\text{Log:BC} = 2,970\ 811\ 6.$$

$$\text{Reszta} = 9,701\ 426\ 9. = \text{Log:Wst:B.}$$

Kąt B, odpowiadający temu Logarytmowi różni się mniej niż  $\frac{10}{2}$  od wyżej znalezionego.

347. *Uwaga.* Nie trzeba opuszczać takowych doświadczeń, zwłaszcza, gdy rachunki zawisły jedne od drugich.

W tym ostatnim razie, naley piy jest wziąć za podstawę bok naywiększy Tróykata: bo tak z zupełną pewnością wiedzieć będziemy, iż kąty przy téj podstawie są ostre.

## PRZYDATEK I.

*Przystosowania Trygonometrii do różnych działan na gruncie.*

348. *Przystosowanie 1.* Wyznaczywszy na gruncie, a potem wyrachowawszy położenia i odległości dwóch punktów, względem iedney podstawy, wziętą była za drugą podstawę odległość tych dwóch punktów i użyto iey do wyznaczenia położen innych Punktów, które z pierwszych stanowisk, albo były nie widzialne, albo też od nich bardzo odległe. Trzeba teraz wyrachować położenia tych ostatnich punktów względem pierwszyéj podstawy... Niech

Tab. XX. Niech  $AB$  wyraża pierwszą podstawę;  $XY$ , dwa punkta, których położenia i odległości, wyznaczone już są względem tej podstawy, przez wymierzenie kątów przy  $A$  i  $B$ . Weźmy potem  $XY$  za drugą podstawę dla wyznaczenia położenia punktu  $Z$ , niewidzialnego z pierwszych stanowisk:  $A$  i  $B$ , albo od nich bardzo odległego. Jakże to położenie punktu  $Z$ , wyznaczymy, względem pierwszej podstawy  $AB$ ?

*Sposób postępowania przez rachunek:*

1. W Trójkącie  $AXB$  wyznaczymy  $AX$ .

2. W Trójkącie  $AYB$  wyznaczmy  $AY$ .

3. W Trójkącie  $XAY$  wiadome mając:  $AX$ ,  $AY$ , i kąt  $XAY$ , wyznaczmy:  $XY$ , i kąt:  $AXY$ .

4. W Trójkącie  $XZY$ , wiadomą mając podstawę, i kąty wszystkie, wyznaczmy  $XZ$ .

W Trójkącie  $AZX$  wiadome mając:  $AX$ ,  $XZ$ , i kąt  $AXZ$  wyznaczmy  $AZ$ .

Podobnie można wyznaczyć  $BZ$ .

349 *Uwaga.* Tym sposobem postępując, można także sprawdzać działania iedne przez drugie czynione z różnych punktów stanowisk. 350.

## O Trygonometrii 329

350. *Przystosowanie 2.* Do jakiegokolwiek linii czyniącej kąt wiadomy z podstawą stosować położenia punktów wyznaczonych już względem téj podstawy.

Niech będzie AC linią czyniącą kąt Tab. XX. wiadomy z podstawą AB, i niech X, będzie punktem, którego położenie już jest wyznaczone względem podstawy AB; trzeba stąd dojść do położenia tego punktu względem linii AC. Fig. 2.

Doydziemy tego, spuściwszy prostopadłą XP na linię AC, i wyznaczysz wielkość téj prostopadłej, iako też ię odległość AP od punktu A.

*Sposób postępowania przez rachunek.*

W Trójkacie AXB można było wyznaczyć linią AX, kąt XAB jest też wiadomy; więc znaydziemy kąt CAX, który jest różnicą kątów CAB, XAB. W Trójkacie tedy PAX, mając wiadome kąty, i przeciwprostokątną AX, można będzie wyznaczyć linie: AP, i PX.

351. *Przyst: 3.* Wyznaczyć promień koła, mając daną cięciwę odcinka iego, i kąt tegoż odcinka.

Niech będzie AB linią daną, na której Tab. XX. nakreślić trzeba odcinek koła mogący zawierać w sobie kąt dany; wyznaczmy promień tego koła. Fig. 3.

Niech



Niech będzie  $C$ , środek koła, szukane-  
go; poprowadźmy linią  $CD$  do środka li-  
nii  $AB$ , ta będzie prostopadłą do  $AB$ ,  
w Trójkącie  $ACD$ , kąt  $ACD$  równa się ką-  
towi odcinka danemu, bo miarą jego,  
jest połowa łuku  $AB$ ; kąt  $CAD$ , jest jego  
dopełnieniem. Wziąwszy  $AD$  za pro-  
mień, będzie  $AC$ , sieczną kąta  $CAD$ , a  
zatem można wyznaczyć, promień koła  
szukanego, z téj proporcji; jak się má  
promień do dosiecznej kąta danego; tak  
się má połowa cięciwy daney do pro-  
mień koła, którego szukamy.

352. *Uwaga.* Stosunek  $AD$  do  $CD$ ,  
równy jest stosunkowi wstawy całej, czy-  
li promienia, do styczney kąta  $CAD$ .

A że, jeżeli  $AB$  jest bokiém wielokąta  
foremnego, będzie  $CD$  promieniem koła  
wpisanego w ten wielokąt; więc mając  
dany bok wielokąta foremnego, i wiedząc  
liczbę boków jego, można wyznaczyć,  
promień koła wpisanego i opisanego,  
przez dwie następujące proporcje.

1. Wstawę całą, tak się má do dosie-  
czney połowy kąta we środku koła, jak  
połowa boku wielokąta do promienia koła  
wpisanego.

2. Wstawę całą tak má się do dosie-  
czney połowy kąta we środku, jak połowa  
boku wielokąta, do promienia koła opisa-  
nego.

## O Trygonometrii 331

353. *Przytósowanie. 4.* Wyznaczywszy trzy boki Trójkąta na gruncie jakim uważanego, i znając kąty, pod którymi widzimy te trzy boki z jednego punktu, trzeba wyznaczyć odległość tego punktu, od trzech wierzchołków Trójkąta.

Niech ABC wyraża Trójkąt, którego wszystkich boków już dosliśmy, niech X, będzie punktem, z którego uważaliśmy kąty, pod którymi dały nam się widzieć linie, AB, BC, AC; trzeba jeszcze wyrachować linie: AX, BX, CX.

Táb. XX.  
Fig. 4.

Niech będą D, i E, środki kół, których odcinki nakreślone na liniach AB, i BC mogą zawierać w sobie kąty równe tym, pod którymi widzieliśmy linie AB i BC. Punkt X będzie w przecięciu tych dwóch kół.

Dwa promienie BD, BE, mogą być wyrachowane tak, iak w przytósowaniu 3.

W Trójkącie ABC, w którym wszystkie boki są wiadome, można wyrachować kąt ABC. Kąt ABD jest wiadomy, bo jest dopełnieniem kąta wiadomego AXB; więc wiadomy jest także i kąt CBD. A że, wiemy i kąt CBE, który jest dopełnieniem kąta CXB; więc wiedzieć będziemy i kąt DBE; a zatem w Trójkącie DBE, wiemy dwa boki: BD, BE, i kąt BDE,

DBE, między niemi zawarty; a zatem można wyznaczyć wysokość BE, która jest połową linii szukaney BX; albo, (co króćcy ieszcze będzie) można, w tym Trójkacie wyrachować kąty D, E. Ze zaś kąt we środku D, równa się kątowi X A B, wspieraiącemu się na łuku dwa razy większym: a kąt weśródku E, jest spełnieniem (w téj figurze) kąta X C B, więc kąty, BAX, BCX są wiadome: a zatem w Trójkatach: BAX, BCX, wiemy kąty wszystkie, i boki: BA, BC; skąd będzie można wyznaczyć linie AX, BX, CX, których szukamy.

Jeden prawie jest sposób postępowania na iakiekolwiek położenie punktu X. W tém tylko bywa odmienny, że czasem trzeba dodawać, a czasem odeymować kąty znaydujące się przy B; i że czasem kąty D i E, równe są kątom przy A i C, a czasem są ich spełnieniem.

354. Rachunek ten może bydź ieszcze skróconym w niektórych przypadkach szczególnych.

Tab. XXI.  
Fig. 1.

Przykład 1. Niech punkt X, znayduie się na przedłużeniu iednego z boków Trójkąta ABC, n p. na przedłużeniu boku AB.

W Trójkacie CAX, wiadome są kąty A,

# O Trygonometrii 333

A, X, i bok CA; więc będzie można wyrachować boki: AX, CX.

Przykład 2. Niech trzy punkta: A, B, C, będą na iednój linii. Tab. XXI. Fig. 2.

Prostokąty AX  $\times$  CX, i BX  $\times$  CX są równe, pierwszy prostokątowi z prostopadłej spuszczonej od X, na AB, i ze średnicy koła opisanego na Trójkacie ACX; drugi, prostokątowi z tejże prostopadłej, i ze średnicy koła opisanego na Trójkacie CXB, więc pierwsze dwa prostokąty tak się mają do siebie, iak i dwa drugie. A że pierwsze tak się mają do siebie, iak linie AX, BX, a drugie tak się mają do siebie, iak dwie średnice; więc stosunek AX do BX iest wiadomy, bo iest równy stosunkowi średnicy koła opisanego na Trójkacie ACX, do średnicy koła opisanego na Trójkacie BCX albo równy stosunkowi promieni tych dwóch kół. Szukając tedy podstawy w Trójkacie, któryby miał kąt w wierzchołku równy kątowi AXB, a zatem wiadomy, i dwa ramiona równe dwóm wyżej spomnianym promieniom; gdybyśmy tę podstawę znaleźli równą linii AB; linie też AX, BX, byłyby równe tym promieniom. Gdyby zaś ta znaleziona podstawa nie była równą linii AB; tedy z dwóch następujących proporcyy dedujemy boków: AX, BX.

1. Jak się ma podstawa znaleziona, do podstawy AB, tak się ma promień pierwszy do AX.

2. Jak się ma podstawa znaleziona, do podstawy AB; tak się ma promień drugi do BX.

Tym sposobem możemy też doświadczać, czyli działania nasze czynione na ziemi, były dokładne.

355. Przytóż. Niech będzie dana linia prosta na gruncie; wyznaczyć bez mierzenia odległość i położenia względem téj linii, dwóch punktów, z których widzimy obadwa téj końce.

Tab. XXI.  
Fig. 3.

Niechby wiadomą była n. p. linia AB, niech będą dwa punkta: C, i D, z których każdego widzieć można końce A, i B, téj linii; wyznaczyć odległości, i położenia tych dwóch punktów, C, i D, tak względem siebie, iak i względem linii AB, nie mierząc pierwéj żadnéj z tych odległości.

Z punktów C, i D, wyznaczmy kąty: ACB, DCB, ADB, ADC, a zatém i kąty: ACD, BDC.

Dávwszy iakąkolwiek ważność linii CD, możnaby z niéj dochodzić ważności linii: CA, CB, DA, DB, i AB.

Gdy



Gdybyśmy przypadkiem ważność tej ostatniej linii AB, znaleźli równą prawdziwej tej ważności, którą wiemy; byłoby to dowodem, żeśmy natrafili na prawdziwą ważność linii DC, a zatem i innych linii.

Gdyby zaś, znalezioną ważność linii AB, nie była równą ważności tej wiadomej; tedy następującą trzeba uczynić proporcją: tak się ma ważność mniemana linii AB, do ważności tej prawdziwej, tak się ma ważność mniemana linii CD, do ważności tej prawdziwej.

*Przystosowania do miar wysokości.*

Moga Nauczyciele namienić tylko o sposobach wyznaczenia wysokości jakieś, czyli to przystępnej, czyli też nie dostępnej przez same żerdzie, albo przez odbijanie promienia światła padającego na powierzchnię jaką płaską i sposobną odbijania, albo na koniec przez wielkość cienia rzuconego od tego przedmiotu (*obiektem*) którego wysokość wyznaczyć mamy.

Pierwszy z tych sposobów, iako w przepisach swoich i z przyczyny łatwości, jest bardzo dobry, tak w używaniu bardzo nie doskonały. W ogólności nawet mówiąc, należy zawsze powątpiewać o działaniach, choćby też z náylepszymi.

mi narzędziami czynionych, gdy idzie o wyznaczenie jakiej wysokości; jestno-  
stajną, albowiem w sobie wysokość, np.  
góry jakiej, może się wydawać czasem  
większą, a czasem mnieyszą, podług nie  
jednakowego stanu, w którym się znaydo-  
wać zwykła nasza Powietrzniá; (atmo-  
sphaera) iako o tém obszerniey będzie  
w Fizyce.

356. Przytós. 1. Niech będzie iaká  
Wysokość nie wiadomá, do której jednak  
możná przystąpić, trzeba wyznaczyć tę  
wielkość, z punktu iakiego oddalonego  
od téjże wysokości.

Wymierzmy podstawę od punktu na  
gruncie obranego, aż do spódku téj wy-  
sokości: od tegoż punktu uważamy iak-  
i kąt czynią na płaszczyźnie pionowej  
dwie linie, jedna ku wierzchołkowi téj  
wysokości, a drugá poziennie wykiero-  
waná. Znaydziemy wielkość téj wyso-  
kości nad linią poziomą (którą per-  
spektywa poziennie ustawioná pokazu-  
ie) przez następującą proporcya: iak się  
má wstawá cała do styczney kąta uwá-  
żonego, tak się má podstawa wymie-  
rzoná do wysokości szukanej. Dodá-  
wszy do téj wysokości, wysokość na-  
rzędziá, znaydziemy całą wysokość,  
którę szukaliśmy. (g) 357.

(g) W dalszych przykładach trzeba za-  
wsze na to pamiętać, aby wysokość narzę-

357. Uwaga. Rzadko się trafia, aby wcale przystąpić można do spodka wysokości, którą wyznaczyć przypada. Tak na przykład, mając wyznaczyć wysokość wierzchołka wieży iakiey, baszty i t.d. nie można wymierzać podstawy, tylko aż do spodka iey murów; można jednak zmierzyć całą grubość wieży, baszty i t. d. a stąd wnieść położenie iey, środka, a zatem i długość, którą dodadź potrzeba do podstawy wymierzoney.

358. Przystos: 2. Niech będzie wiadomą wysokość (1) z której wierzchołka wyznaczyć przypada odległość punktu położonego na gruncie, a widzialnego z meysca stanowiska.

Ustawiwszy katomięrz na płaszczyźnie pionowey, iak wyżej, naznaczymy kąt, który czyni perspektywa iedna w po-

X

dzia dodawać do wyrachowaney Trygonometrycznie wysokości: co lubo się wyraźnie kładź, nie będzie, samé jednak okoliczności dostatecznie potrzebę tego okażą.

(1). Wysokości wieży, lub iakiego podobnego budynku iatwo doysdź można, spuściwszy z góry na dół sznur, który potem zmierzony, da poznać tę wysokość. Trzeba ietnak mieć baczność na to, aby sznur iednakowo wszędzie był wyciągniony. Obacz między innemi Dzieło iuż wyżej zaleconé.

P. de Luc. Tom. 2. §. 526.

ziemnem położeniu, a drugą wykirowaną ku punktowi, którego odległości szukamy. Zróbmy potem tę proporcją: iak się ma wstawa cała do dostycznej kąta naznaczonego, tak się ma wysokość daną do odległości szukanej.

*Uwaga.* Można tym sposobem wyznaczyć odległość od spodka wysokości iakię, tylu punktów, ile zechcemy; mając już wiadomą wysokość, z której wierzchołka wyznaczać przypada tę odległość. Uważając zaś, i znacząc kąty, które zrobi perspektywa (k) kierowana do tych różnych punktów, będzie można wyznaczyć i położenie ich, jednych względem drugich.

359. Przypadek 3. Mając wiadomą odległość punktu iakiego od spodka wysokości, na której się stoi, wyznaczyć tę wysokość.

*Uwaga.*

(k) Te kąty ściśle mówiąc, nie tak czyni perspektywa coraż do innego punktu na gruncie położonego, kierowana, iako bardziej płaszczyzny pionowej przechodzącej przez perspektywę za każdym celowaniem. Należygodnię się to działanie wykonać: gdy kątomierz będzie miał półkołę prostopadłą do reszty narzędzi i opatrzoną perspektywą ruchomą.

## O Trygonometrii 339

Uwazywszy kąt tak iak wyżej, zrobimy tę proporcją: Jak się ma wstawa cała do stycznej kąta uważonego, tak się ma odległość daną do wysokości szukanej.

360. Przystos: 4. Niech będzie wysokość nie dostępna, trzeba ją wyznaczyć.

Sposób postępowania najpospoliciej używany, zawisł na tém, aby wymierzyć podstawę iaką wprost téj wysokości, której szukamy, i naznaczyć kąty pod którymi z obudwóch końców téj podstawy, widzimy wysokość szukaną. Można stąd doysdź, tak wysokości, iako też i odległości ięj spodka, od obudwóch końców podstawy.

Niech SP wyraża wysokość, a AB Tab. XXI. podstawę wymierzoną wprost ku téj Fig. 4. wysokości. Wyznaczmy kąty A i B przez perspektywę, iedną poziomnie ustawioną, drugą ku wierzchołkowi S, wykie-rowaną.

W Trójkacie ASB, zachodzi ta proporcja.

$$\text{Wst: ASB: wst: A} = \text{AB: BS.}$$

W Trójkacie BSP, iest;

$$\text{Wst. cała: wst: B} = \text{SB: SP.}$$

$$\text{Więc wst. cała} \times \text{wst: ASB: wst: A} \times \text{wst: B} = \text{AB: SP.} \quad \text{X2} \quad 361.$$



361. *Uwaga 1.* Tęgo sposobu używając, można naprzód uchybić w braniu takiej podstawy, któraby przedłużoną prosto prowadziła, do wysokości podanej do wymierzenia; ponieważ zaś w wielu przypadkach trudno jest utrafić na takie podstawy położenie; będzie więc i wysokość stąd wyrachowana, nie pewną. Powtóre, gdy podstawa AB, jest bardzo nachyloną względem linii AS, BS, kąt ASB, pod którym pokazuje się ta podstawa AB, jest bardzo mały względem kąta ASP, a zatem i podstawa AB wymierzona jest bardzo małą względem całej podstawy AP: skąd także wyznaczenie wysokości PS będzie mniej dokładne.

362. *Uwaga 2.* Gdy narzędzie, którego używamy, opatrzone jest w półkole pionowe; to będzie służyć do dania tak dobrego podstawie położenia, iakiego tylko grunt pozwoli.

Táb. XXI. — Niech linią AB wyraża iakąkolwiek Fig. 5: podstawę wymierzoną; a linią SP, niech wyraża wysokość, której szukamy.

Ustawiwszy półkole pionowe tak, aby Prawidło ruchome zmierzało ku punktowi S, a zatem, aby linią SP, wpadała na płaszczyznę tego półkola; uważamy kąt SAP na płaszczyźnie pionowej, i kąt PAB wyznaczony na płaszczyźnie

kąto-

## O Trygonometrii 341

kątomierza poziomnie ustawionego. Zróbmy to samo i na drugim stanowisku, przy punkcie B.

W Trójkącie PAB, gdzie wiadomą jest podstawa, i wszystkie kąty, będzie:

$$\text{Wst. APB} : \text{wst. ABP} = \text{AB} : \text{AP}.$$

W Trójkącie prostokątnym SAP, jest:

$$\text{Pr. styczn. SAP} = \text{AP} : \text{SP}.$$

Więc  $\text{Pr.} \times \text{wst. ABP} : \text{wst. APB} \times \text{stycz. SAP} = \text{AB} : \text{SP}.$

Gdyby nawet dla jakiej zawady nie można razem brać kątów pionowych, i kątów poziomych; tedy jednak wyznaczając ciąg linii AP, BP, można by osobno wymierzyć kąty poziome: PAB, PBA. Z tem wszystkiem wyznaczenie tego ciągu z wielką częstokroć pracą przychodzi.

363. *Przystós. 5.* Niech będzie dana linia na jakim gruncie, i niech będzie wysokość niewiadoma, z której wierzchołka można widzieć końce tej linii danej. Trzeba wyznaczyć odległość tych dwóch końców, od spodka wysokości niewiadomej, i też samą wysokość.

1. Uważamy z wierzchołka wysokości, kąty na płaszczyźnie pionowej, zawarte między linią pionową, albo nitką z ciężarem zawieszoną, i między perspektywą wykierowaną następnie do dwóch końców linii danej. Odległości tych końców, od spodka wysokości, tak się do siebie mieć będą, iak stycznė kątów uważanych: (będą zaś te odległości stycznemi kątów tych wyznaczonych, gdy wysokość za promień wziętą będzie,) a zatem stósunek tych odległości będzie wiadomy. Uważamy i tén kąt, który się zrobi na płaszczyźnie poziomej kątomierza, przez płaszczyzny pionowej, na których znajdować się będzie perspektywa następnie do tych dwóch punktów kierowana. Tén kąt równy kątowi zawartemu między dwiema liniami prowadzonemi od końców podstawy do spodka wysokości, będzie kątem w wierzchołku Trójkąta, mającego wiadomą podstawę i wiadomy stósunek ramion, a zatem można tén Trójkąt zupełnie wyřchować.

*Uwaga.* Gdy narzędzie tak jest zrobione, że go nie można użyć do mierzenia kąta zawartego między liniami, któreby od spodka wysokości prowadzone były do dwóch końców Podstawy, w takim razie, trzeba mieć wiadoma wszystkich tych trzech punktów odległość: wyiawszy, gdyby dwa koń-

ce podstawy, były w jednej linii z spodem wysokości. (1)

## PRZYDATEK II.

### Pierwsze początki równoważenia.

**W** pierwszych początkach, na których się równoważenie (*libellatio*) zasadza, można uważać ziemię, iakoby ta zupełnie miała figurę kuli. Różnica zachodząca między tą mniemaną, a prawdziwą ię figurą (spłaszczoną w końcach osi) bardzo mało wpływa w działaniach, o których tu mówić się będzie; wiadomości zaś potrzebne do czynienia w rachunkach, popraw: z przyczyny nie zupełnej ziemi okągłości, byłyby teraz niewczesne i nad pojęcie Uczniów.

364. Uważając Ziemię, iak gdyby zupełnie była okągłą, i przeciąwszy ją płaszczyzną przez środek ię przechodzącą; przecięcie to byłoby kołem którego promień byłby tenże sam, co i promień ziemi.

---

(1) Gdyby nie było sposobności czynić na gruncie działań, wyrażonych w tych ostatnich przystosowaniach; tedy dla ułatwiejszego Uczniów pojęcia, można działać na figurach wyrobionych z drewna wykonywać.

ziemi. Na okręgu tego koła podzielonym na 360. stopniów rachując mil Niemieckich 15. (które się nie wiele różnią od Polskich) na jeden stopień; cały ten okrąg zawierając w sobie będzie mil Niemieckich 5400, a zatem średnica jego, to jest średnica ziemi mieć będzie długości mil prawie 1719. albo, rachując okrągło: 1720.

Te długość na mniejsze miary Polkić z Niemieckich zamieniając (sposobem w Arytmetyce podanym) będzie średnica ziemi; więcéy cokolwiek niż.

21 000 000, łokci Polkić.

7 000 000, sążni.

2 800 000, prętów

280 000, sznurów.

365. Mówi się, że dwa miejsca są do równowagi (ad libellam,) gdy równą mają od środka ziemi odległość. J tak powierzchnia wody stojący, wszystkie punkta mają do równowagi.

Gdy linia jaką prostopadła jest w punkcie powierzchni ziemi do ięy promienia, przez ten punkt przechodzącego; ta linia prócz jednego tego punktu: społnego z promieniem, którego odległość od środka, równa się promieniowi ziemi, wszystkie inne swoje punkta, dalsze mieć będzie



dzie w rzeczy samej, od środka ziemi; ale że przy takiej wielkości promienia ziemi, różnica położenia tej linii, okazujący równowagę pozorną (*libella apparens*) od położenia wody stojącej, którą okazuje równowagę prawdziwą (*libella vera*), tak mówię różnica tak jest mała, że chyba w znacznej bardzo odległości da się postrzedz, przeto w zwyczajniejszych działaniach, można na tę różnicę, względu nie mieć, i równowagę pozorną za równowagę brać prawdziwą.

W odległości 900. łokci, albo 300 sążni, różnica ta nie dochodzi i. cala.

Jakoż niech promień CA, wyraża promień ziemi, linią AB. niech wyraża stycz. Táb. XXI.  
Fig. 6.  
ną do końca tego promienia prowadzoną, a bardzo małą względem niego. Niech BDCd wyraża linią, ciągniętą przez punkt B, i przez środek ziemi, spotykającą się powierzchnią w punktach D. i t.d. Bedzie  $AB^2 = DB \times Bd$ ; a że linią BD jest bardzo mała względem linii Bd, będzie prawie  $AB^2 = Dd \times BD$ ; a  $BD = \frac{AB^2}{Dd}$ .

Niechby AB, zawierała w sobie łokci 900, znajdziemy BD mniejszą od  $\frac{1}{24}$  części łokcia, to jest mniejszą od cala.

Linią ta BD jest prawie proporcjonalną kwadratowi linii AB, a zatem w odległo-

### 366. GEOMETRII C. I. ROZDZIAŁ XII.

ległościach, 2, 3, 4, 5, i t. d. razy mniej-  
szych od 100, lokci, będzie, 4, 9, 16, 25,  
i t. d. razy mniejszą od cała.

366. Lubo nierówności na powierzchni  
ziemi, są bardzo małe względem wielko-  
ści całej ziemi a zatem można na nie wzglę-  
du nie mieć w niektórych okoliczno-  
ściach; te jednak nierówności wiele się  
przykładają do odmian, które na ziemi  
postrzegamy. Gdyby n. p. ziemia była  
Matematyczną kulą, to jest zupełnie okrę-  
głą; wody wszystkie na tej powierzchni  
znajdujące się byłyby stojącemi; nie by-  
łoby ani rzek, ani strumyków, ani rzódół  
wytryskujących i sztuką tylko można by  
wody z jednego miejsca na inne spro-  
wadzać.

367. Przez działania równoważenia,  
wyznaczają się te nierówności, czyli róż-  
nica, która zachodzi między odległo-  
ścią od środka ziemi, dwóch albo więcej  
punktów. Przeto dochodzenie jakiegokol-  
wiek wysokości, można sobie wysta-  
wić pod ogólnym tem wyobrażeniem  
działań równoważenia; zwyczajnie ie-  
dnak działania te dalej się nie rozciągają,  
jak do wyznaczenia pomniejszych wyso-  
kości, a szczególniej do sprowadzenia  
wód z jednego miejsca na drugie, co ob-  
szerniej zwykło się wykładać w Fizyce.

W działaniach równoważenia, używane

se niektóre narzędzia, służące do wyznaczenia linii prostej ukazującej równowagę pozorną. Tych wszystkich narzędziów opisanie, wieloby tu miejsca zabrało, (m) wyrażą się jednak potrzebniejsze.

368. Równowaga wodna, jedna z najprościejszych, składa się z rurki mosiężnej, albo blaszanej, i z dwóch butelek szklanych iak najprzezroczystszych, przy końcach téżże rurki przyprawionych: Woda w tych butelkach zawartą przechodzi przez rurkę, i w równy w obu dwóch butelkach utrzymuje się wysokości. Osadzoną bywa taká równowaga na nodze drewnianej, podobnie iak stołek mierniczy, albo kątomierz.

369. Używanie iey na tém się zasadza, że woda przez otwarcie iakie łączące dwa lub więcej naczyń, przechodząc z jednego do drugiego, uклада się do równowagi. Z wielką iednak ostrożnością używać potrzeba, téy tu opisaney równowagi, gdy bez pomocy perspektyw, gotem

---

(m) Dokładne i obszerné opisanie tych narzędziów, znaydnie się w Książce P. Plakarda o równowazeniu; która z więz przydatkami wyłożoną jest z Francuzkiego na Niemiecki język przez F. Landerra. Wielé także doczytać się mozna w Książce napisaney w téy materii przez P. Le Febure.

tém okiem do powierzchni wody przyftawioném, celuiemy do iakiego mieysca.

370. Układ równowagi powietrznęj zasądza się na własnoci powietrza, ile lekszego od wody. Przez tę własność, powietrze w rurce wraz z wodą zamknięte wychodzić nad wodę musi.

Jest to jeden z pąylepszych sposobów do ustawienia, podług równowagi, prawidła, albo raczej perspektywy do niego przyprawionęj.

Równowagi powietrznęj do wielkiey doskonałości można przyprowadzić, iako to, opisując równowagę Brandera, obszernie wywodzi P. Lambert w przydatkach swoich do Xiążki Pikarda. Robią jeszcze i równowagi próżnę to jest takie, z których powietrze jest wyciągnionę.

Te równowagi, za świadectwem X. Fontany, nąymniejszą nawet nierównosć poznać daią.

371. Do wykięrowania linii, prawidła, lub perspektywy, podług położenia poziomego, służy też i nie, która przez ciężar w końcu jej zawieszony do pionu się uklada.

Ta nie ponieważ jest prostopadłą do linii iakieykolwiek poziomey, na tę więc

zasadę  
tunku  
mi P

3  
trzeb  
łokcie  
znak  
bny,  
a na  
razon  
żną.

3  
miej  
trzeb

P  
miej  
t. d.  
czyli  
ku p  
ny, n  
ny,  
tego  
fity,  
żenn  
srzo  
nā,  
rach  
całę  
tedy  
gi.  
będz

zasadzie robić zwykli; innego ieszeze gatunku równowagi, nazwane równowagami *Pikarda*, *Huyghensa* i t. d.

372. Do działań równoważenia, potrzebny także jest pręt podzielony na łokcie, cale i t. d. na który wkłada się znak z papieru grubego, lub inny podobny, mogący się posuwać wzdłuż pręta; a na środku tego znaku ma być cel wyrażony, któryby i z daleką rozeznać można.

373. Niech będą dwa iakiékolwiek miejsca, których różność równowagi trzeba znaleźć.

Postawmy narzędzie, na iednym z tych miejsc; a na drugim pręt na łokcie, cale i t. d. podzielony. Perspektywę poziomą, czyli do równowagi ustawioną kierujemy ku prętowi: do którego znak przyprawiony, ma być przez inną osobę spuszcza-ny, lub podnoszony póty, póki środek tego znaku nie przypadnie w linii prostej, którą poziomą perspektywę położenie wyznacza. Jeżeli wysokość tego środka znaku, od spodka pręta rachowana, będzie równą wysokości perspektywy rachowanej od spodka nogi, na której całe narzędzie z perspektywą jest wsparte; tedy dwa te miejsca będą do równowagi. Jeżeli zaś wysokość środka znaku będzie większą, lub mniejszą od wysokości



ści perspektywy; tedy spodek pręta będzie tyle niższy lub wyższy od spodku nego narzędzia; ile jest różnica między temi dwiema wysokościami.

Tego sposobu równoważenia używać tylko można w odległościach na 100, a naywięcej na 200, szpni.

W większych odległościach, uchybieńia byłyby znaczniejsze, tak z przyczyny zbieżności światła łamiącego się w powietrzu, iako z niedokładności narzędzia, które w większych odległościach większe też sprawuje uchybienie, a nakoniec i z przyczyny różnicy, zachodzącej między prawdziwą i pozorną równowagą.

374. Po części można się ustrzedz tych uchybień, a raczej one zmniejszyć, stawiając narzędzie w równy, ile bydy może, odległości, między dwoma miejscami, które równoważyć mamy. Obu dwóch tych miejsc trzeba wyznaczyć równowagę względem tego średniego stanowiska. Ponieważ zaś różnica wysokości środka znaku na dwóch tych miejscach postawionego, jest różnicą tychże miejsc wysokości, iedney względem drugiey, ta więc różnica będzie wyższe od drugiego to miejsce, w którym znak niżey jest położony.

Przez

reżeta be-  
spodku  
między

używać  
100, a

uchybie-  
zyczyny  
g w po-  
narze-  
głościach  
a nako-  
nodzącey  
równno-

edz tych  
zyc, sta-  
ile bydz  
na miey-  
y. Obu-  
yznaczych  
zedniego  
a wyso-  
ch miey-  
a tychze  
zgledem  
wyższe  
em znak

Przez to dwoiakie działanie można z jednego stanowiska równoważyć dwa iakie miejsca, których odległość zawierałaby n p. 300. sążni, a zatem iużby nadto wielką była, aby się w niej pierwszego do równoważenia sposobu użyć godziło.

375. Gdy miejsca do równoważenia wyznaczone, są ieszcze odlegleysze, n p. na iednę, lub dwie mile dalekie, iedno od drugiego, można tę przywiekszą odległość podzielić na części, z których każda zawierałaby około 300. sążni: a dopiero z pośrzedką każdej tej mniejszej odległości, równoważyć iey końce, czyli granice.

Przez pierwsze takowe działanie, znaydziemy różnicę pierwszego punktu wysokości od drugiego następującego. Przez drugie działanie znaydziemy różnicę wysokości tego drugiego punktu od trzeciego, i tak dalej, aż na koniec znaydziemy różnicę wysokości przedostatniego punktu od ostatniego, który kończy całą odległość, a temi samem doydziemy też i różnicy wysokości pierwszego punktu od ostatniego, toiest, doydziemy różnicy wysokości między ieanym i drugim końcem całej odległości.

376. Gdyby się zdarzyło, że postępując od każdego punktu podziału, do innego ieanu naybliższego, każdy ta-  
ki

Przez

ki punkt następny byłby wyższy lub niższy od poprzedzającego, z którym się w równoważeniu porównywa: tedy summa różnic wysokości między iednym i drugim punktem następnym pokazałaby całą różnicę między wysokością dwóch punktów kończących całą odległość. Ale jeżeli te punkta następne są na przemianę iedne wyższe, a drugie niższe względem tych, z którymi się przy każdym działaniu porównywiają; tedy wziąć trzeba summę różnic wysokości punktów wszystkich, które przy każdym następnem działaniu są wyższe od tych, z którymi je porównyujemy (postępując zawsze od iednego końca całej odległości, do drugiego.) Trzeba ieszcze wziąć i summę różnic wysokości punktów wszystkich, które przy każdym działaniu następnem są niższe od tych, z którymi się porównywiają (w tę samą stronę co i pierwey postępując.)

Jeżeli te dwie summy będą równe; znakiem to będzie, że obadwa całej odległości konce są do równowagi. Jeżeli zaś te dwie summy będą nie równe; tedy ostatni koniec odległości, tyle wyższy lub niższy będzie od pierwszego, ile pierwszą summa większą lub mniejszą jest od drugiej.

377. Aby nie być obowiązanym porównywać przy każdym stanowisku, wy-

sokość  
do row  
pomoc  
ku, i  
każde  
z tych  
służyć  
pną,  
Ci dw  
każde  
giemu  
który  
stępują  
nie pu  
szczon

Po  
gólnyc  
summa  
cnika  
summę  
od dru  
dwóch  
dwóch  
równó  
będzie  
powia

378.  
położ  
iak n.  
cę wy  
brzega  
sokości

sokości dwóch punktów przypadających do równoważenia; lepiey jest, że dway pomocnicy rachować będą wysokość znaku, i onę dla pamięci zapisywać po każdym szeregłnem działaniu. Jedna z tych wysokości oznaczonych, będzie służyć do porównania iey z inną następną, która jeszcze nie jest znaleziona. Ci dway pomocnicy postępować będą po każdym szczególnym działaniu, ku drugiemu końcowi całej odległości; ten, który wprzody poydzie, stanie przy następującym punkcie podziału, a drugi stanie przy punkcie od pierwszego opuszczonym.

Po skończonych tych wszystkich szczególnych działaniach, zbierze się wraz summa wysokości od pierwszego pomocnika oznaczonych, i podobnie w jedną sumnę zbiorą się wysokości oznaczone od drugiego pomocnika. Różnica tych dwóch summ, będzie różnicą wysokości dwóch punktów skrajnych, któreśmy równoważyć postanowili. Ten zaś punkt będzie wyższy od drugiego, któremu odpowiadająca summa będzie mnieysza.

378. Co się tycze równoważenia miejsc położonych w Kraiach bardzo odległych; iak n. p. gdyby trzeba wyznaczyć różnicę wysokości miejsc położonych przy brzegach morza szródziemnego, od wysokości miejsc innych w szród Polski położo-

łożonych, albo przy brzegach morza Bałtyckiego; rozumiem że pewnie o tém mowa będzie w Rzyce. Można w tej mierze czytać między innemi Dzieło wielkie P. De Lue. o różnych umiarkowaniach powietrzni otaczającej ziemię (sur les modifications de l' Atmosphere.)

### ROZDZIAŁ XIII.

*O kwadrowaniu koła, czyli o wynalezieniu Powierzchni Koła.*

379. **O**bwody Wielokątów foremnych podobnych sobie, tak się do siebie mają, iak promienie kół w nie wpisanych, lub na nich opisanych. Powierzchnie tychże Wielokątów, równają się Trójkątom mającym za wysokość promienie kół wpisanych, a za podstawę obwód Wielokątów. Też powierzchnie Wielokątów foremnych podobnych do siebie, tak się mają do siebie, iak kwadraty promieni kół wpisanych, i t. d. Wszystkie te Twierdzenia nie zawisły od liczby boków w Wielokątach, i zawsze są prawdziwe, chociażby największą była liczba boków.

380. Stąd здаie się, że prawdziwe będą te wszystkie Twierdzenia, gdyby nawet liczba boków tak wielką była w wielokątach, żeby ich od kół rozemnić podobną, i gdyby promienie kół

kół  
dzy  
nier

zaw  
ką  
ta c  
niżej

Geor  
nicę  
nym  
wiel  
dzie  
wyst  
Jeże  
ducl  
prze  
będz  
z ha  
żanó  
ręgo  
kię  
oni  
w ta  
wio  
nā  
mā  
to r  
szcz  
któr  
rzy  
niu  
sam  
cy  
wcz



kół wpisanych i opisanych różnicy między sobą nie miały, ale się jednym promieniem wydawały. (n)

381. *Twierdzenie przybrane.* Można zawsze chociaż myślą podzielić ilość iaką na tyle części równych, aby każda ta część w szczególności mniejszą była, niżeli inną iakąkolwiek ilość naznaczoną.

Y2 Do.

ylili o  
Kola.

mnych  
do sie-  
ie wpi-  
wierz-  
nią się  
e pro-  
dstawę  
rżchnie  
ch do  
k kwa-  
i t. d.  
jsty od  
zawsze  
większą  
wdziwe  
gdyby  
ta była  
ot roz-  
omiennie  
kół

(n) Takowe rozmowianie, przywiodło Geometrów, że do kół, uważanego za granicę między wielokątami wpisanym i opisanym, przystosowali te Twierdzenia, które o wielokątach stanowili. Dostę podobno będzie przy pierwszym czytaniu tej Książki, wystawie Ucznióm kół, pod tą postacią. Jeżeli jednak przez ćwiczenia poprzedzające, ducha dokładności i ścisłości w niej nabyl, przeciwną rzeczą zapewne zdawać im się będzie, przechodzić od wielokąta, choćby z największą liczbą boków, do kół uważanego pod postacią wielokąta takiego, którego liczba boków większą byłaby od iakiejkolwiek liczby naznaczonej. Postrzegają oni, i postrzedz powinni skok niezmierny w takowym przechodzeniu: gdyż ściśle mówiąc: linia krzywa nie może być uważana, jako zbiór wielu linii prostych bardzo małych, do siebie nachylonych. Należy przeto rzecz tę z większą dokładnością wyłuszczyć nie dla zablężenia wielu trudności, które w tej mierze zarzucać zwykli niektórzy o świetle rozumu swego i przeniknięciu nadto, przedzielić, a ledwie w rzeczy samej pierwszej Matematyki początki znałszy, jako też i dla wprowadzenia niędzy za-  
wczasu w dokładność Matematyczną.

**Dowódz:** Pomnożmy tę drugą ilość naznaczoną, tyle razy, ile potrzeba, aby się stała większą od pierwszej ilości danej; na tyleż części równych podzielmy ilość pierwszą, ile razy była pomnożoną ilość druga: każda takowa część ilości pierwszej, mniejszą będzie od ilości drugiej naznaczonej.

W szczególności mówiąc, gdy się weźmie połowa ilości jakiej skończonej, i tej połowy połowa, to jest czwartą część całej ilości, i znowu tej ostatniej połowy połowa, to jest osma część całej ilości: dalej połowa tej osmej części, to jest, część szesnasta i t. d; dojdzie się na ostatek do takiej części, która mniejszą będzie od wszelkiej ilości naznaczonej. (o)

382. **Twierdzenie 1.** Można opisać na kole danem i wpisać wewnątrz foremne dwa takie wielokąty podobne, aby stosunek ich obwodów przybliżał się bardziej do stosunku równości, niżeli jakikolwiek inny stosunek nierówności naznaczony.

Przy-

---

(o) Przestrzegać będą Nauczyciele Uczniów; aby zamiast słowa: *naznaczoną*, nie używali tego drugiego słowa *naznaczyć się mogącą*, i dadzą im poznać różnicę tych dwóch wyrazów.

**Przykład.** Można wpisać w koło i na niemi opisać dwa wielokąty foremné podobné, takie, którychby różnica obwodów mniejszą była od dziesiątej na przykład części obwodu, jednego z nich.

Niech będzie CA promień koła, po- Táb. XXII  
dzielony na dziesięć części równych, i Fig. 1.  
niech AB jednę taką część wyraża.

Przez B przeciągniemy DBd. prostopadłą do promienia, i spotykającą okrąg koła w punktach D, i d. Podzielmy okrąg koła, na 2, 4, 8, 16. i t. d. części równych, póty, póki nie dojdziemy do części koła mniejszej od łuku DAd. Niechby na przykład łuk EAe był jedną z tych części mniejszych od łuku DAd: i punkt A, niechby go dzielił na dwie części równe EA, Ae. Pociągniemy linię Ee, (która będzie prostopadłą do AC). Przez punkt A niech przechodzi styczna FAf, i niechay dwa promienie CE, Ce, schodzą się z tą styczną w punktach F, f. Linie Ee, Ff, są bokami dwóch wielokątów foremných podobných, jednego w koło wpisanego, a drugiego na kole opisanego; a zatem obwody tych dwóch wielokątów będą, iak boki Ee, Ff, albo iak linie CG, CA. Więc różnica obwodów tych dwóch wielokątów, będzie do obwodu większego wielokąta, iak linia AG, do linii CA. A że linia AG mniejszą jest od linii AB, to jest

jest od dziesiątej części linii CA; więc i różnica dwóch obwodów mnieyszą będzie, niżeli dziesiąta część obwodu wielokąta na kole opisanego.

Gdyby linią AB, była  $\frac{3}{11}$  linii BC, albo  $\frac{3}{11}$  linii AC, można by podobnym sposobem dowieść, że różnica dwóch obwodów, tak się ma do obwodu wielokąta w koło wpisanego: iak linią AG do linii CG. A że AG mnieysza jest od AB; więc tém samém mnieysza jest od  $\frac{1}{10}$  tej części linii BC, a tém bardziey mnieysza będzie od 10tej części linii CG. Różnica tedy między dwoma obwodami wielokątów mnieysza byłaby od 10tej części obwodu wielokąta w koło wpisanego. (p)

383. *Wniosek 1.* Można w koło wpisać wielokąt ieden foremny, i drugi podobny na nim opisać, tak aby stosunek obwodu koła do obwodu iednego z dwóch wielokątów, bardziey był przybliżony do sto-

---

(p) Daje się tu przykład liczebny dla łatwiejszego pojęcia. Że jednak té rozumowania uważane w sobie nie zawisły od tych liczb, i mogą być przystosowane do wszystkich innych; przeto dowodzenie nasze nie jest dla tego, szczególnego przystosowania, ani mniey dokładnem, ani mniey ogólném.

O kwadrowaniu koła, 359

środku równości, niżeli jakkolwiek inny środekznaczony.

*Przykład.* Niechby opisany na kole był jeden wielokąt, a drugi podobny w koło wpisany, i niechby różnica ich obwodów mniejszą była od  $\frac{1}{15}$  części obwodu wielokąta wpisanego.

Różnica obwodu wielokąta opisanego, od obwodu koła mniejszą będzie niż różnica obwodu tegoż wielokąta od obwodu wielokąta wpisanego; to jest, mniejszą niżeli  $\frac{1}{15}$  część obwodu wielokąta wpisanego, a tem bardziej mniejszą od  $\frac{1}{15}$  części obwodu koła.

Różnica także obwodu koła od obwodu wielokąta wpisanego mniejszą jest, niżeli różnica między obwodami dwóch wielokątów, a zatem mniejszą od  $\frac{1}{15}$  części obwodu wielokąta wpisanego, a dopieroż mniejszą od  $\frac{1}{15}$  części obwodu koła.

384. *Wniosek 2.* Mając daną linią prostą, wziętą za równą okręgowi koła danego, wpisać w to koło, i opisać na nim wielokąty, których obwodów różnica od obwodu koła mniejsza byłaby, niżeli linią daną jakiegokolwiek małości.

Po-



Pomnożmy ostatnią tę linią tyléraz, aż większą będzie od linii wziętej za równą okręgowi koła. Niechby naprzykład 10. razy powiększoną była ta linia. Wpiszmy w koło i opiszmy na niem dwa wielokąty foremne podobne, którychby różnica obwodów mnieyszą była od  $\frac{1}{10}$  części obwodu jednego z nich. Będzie zatem różnica obwodu koła od obwodu któregokolwiek z tych dwóch wielokątów mnieyszą niżeli  $\frac{1}{10}$  ta część obwodu, jednego z tychże wielokątów, naprzykład obwodu wielokąta wpisanego; a dopióróż mnieyszą niżeli  $\frac{1}{10}$  ta część okręgu koła, a jeszcze mnieyszą, niż linią daną wyznaczonéy małości.

385. Twierdź: 2. Okręgi kół tak się mają do siebie, jak ich promienie.

Niech będą dwa koła C i c, a tych okręgi O i o, promienie zaś P i p; będzie zatem  $O: o \Rightarrow P: p$ .

Gdyby ta proporcya w czém chybiała; tedy pierwszy stosunek byłby większy lub mniejszy od drugiego. W pierwszynie razie trzeba by powiększyć okrag o, a w drugim okrag O, aby naprawić proporcya; a zatem w obydwóch razach trzeba powiększyć jeden z okręgów dla zrobienia proporcji.

Niech-

Niechby linią prostą  $L$  większą była od okręgu  $O$ , i niechby było ( jeżeli podobna )  $L : o = P : p$ .

Opiszmy na kole  $C$  wielokąt foremny, którego by różnica obwodu, od obwodu koła, mniejsza była, niżeli różnica  $L$  od  $O$ . Na drugim także kole  $c$ , opiszmy wielokąt foremny podobny pierwszemu. Obwody tych dwóch wielokątów tak się mieć będą do siebie, jak promienie  $P$  i  $p$ , kół  $C$  i  $c$ ; albo jak  $L$  do  $o$ , ( ponieważ miało być  $L : o = P : p$  ). A że obwód pierwszego wielokąta, mniejszy jest, niżeli  $L$ , więc i obwód drugiego, mniejszyby był powinien niżeli  $o$ , to jest mniejszy niżeli okrąg koła, na którym jest opisany: co być nie może.

Więc stosunek promieni dwóch kół, nie jest większy ani mniejszy do stosunku ich okręgów: a zatem równy jest temuż stosunkowi.

386. Wniosek 1. Idzie zatem, że stosunek okręgu koła jednego, do swego promienia tenże sam jest, co i stosunek któregokolwiek innego koła, do swego także promienia.

Przeto gdyby można znaleźć stosunek jakiegokolwiek koła, do jego promienia, już tem samem byłby znaleziony stosunek każdego innego koła do swego promienia.

387. *Wniosek* 2. Dwa prostokątne Trójkąty są do siebie podobne, gdy mają za wysokości, promienie dwóch kół, a za podstawy linie wzięte za równe okręgów tychże kół: a zatem takie dwa Trójkąty będą do siebie w stosunku dwumnożnym ich boków; naprzykład promieni dwóch kół.

388. *Twierdz.* 3. Powierzchnia koła równą się powierzchni Trójkąta, mającego za wysokość promień tego koła; a za podstawę, jego okrąg.

*Dowódz.* Gdyby ten Trójkąt nie był równy powierzchni koła; byłby od niej większy, albo mniejszy: a zatem koło byłoby równe innemu Trójkątowi téżże samej wysokości, za podstawę zaś mającemu linią większą, albo mniejszą od okręgu koła.

Nazwiemy okrąg koła, *O*, a tę linią, większą albo mniejszą od okręgu nazwiemy *L*.

W pierwszym razie, w którym ta linią *L*, większa byłaby od okręgu koła, opiszemy na nim wielokąt forenny, którego obwód mnieyby się różnił od okręgu koła, niżeli się różni od niego linią *L*: a zatem linią *L*, większąby była od obwodu wielokąta. Powierzchnia tego wielokąta byłaby mniejszą od powierzchni Trójkąta

kąta  
koła,  
by ta  
sza c  
wielo

W  
mniey  
my  
obwó  
koła  
łokat  
my  
rémn  
zawi

P  
równ  
wysc  
obw  
iest

A  
wpis  
pow  
moż

ksz  
kąt  
teg  
a z  
Tró

koła mającego za wysokość promień koła, a za podstawę, linia L, to jest byłaby też powierzchnia wielokąta, mniejszą od powierzchni koła, na którym wielokąt jest opisany; co byż nie może.

W drugim razie, w którym linia L, mniejszą byłaby; od okręgu koła, wpiszemy w koło wielokąt foremny, którego obwód mnieyby się różnił od okręgu koła, niżeli linia L, a zatem obwód wielokąta byłby większy od linii L. Wpiszemy w to samo koło wielokąt inny foremny, tyle dwoie, co pierwszy boków zawierający.

Powierzchnia tego drugiego wielokąta, równałaby się Trójkątowi, mającemu za wysokość promień koła, a za podstawę obwód pierwszego wielokąta: (268) to jest linią większą od L.

A zatem powierzchnia tego wielokąta wpisanego w koło, większą byłaby niżeli powierzchnia koła: co byż także nie może.

Węc powierzchnia koła, ani jest większą, ani mniejszą od powierzchni Trójkąta mającego za wysokość promień tego koła, a za podstawę jego okrąg; a zatem równa jest powierzchni tego Trójkąta.

389. *Wniosek 1.* Powierzchnie kół są do siebie w stosunku dwumnożnym ich promieni, albo średnic. przeto, gdyby promienie kół były jak liczb: 1, 2, 3, 4, 5, i t. d. powierzchnie tychże kół byłyby jak kwadraty: 1, 4, 9, 16, 25 i t. d.

390. *Wniosek 2.* Powierzchnia koła, tak się ma do powierzchni wielokąta na nim opisanego, jak okrąg koła do obwodu wielokąta. A w szczególności powierzchnia koła, tak się ma do powierzchni kwadratu na nim opisanego, albo, co na jedno wychodzi, do kwadratu średnicy, jak się ma okrąg koła do obwodu tego kwadratu: to jest, jak się ma okrąg koła, do swojej średnicy cztery razy wziętej, czyli do linii tak długiej, jak cztery średnice.

Stąd porównanie dokładne powierzchni koła, z powierzchnią kwadratu, a zatem i porównanie koła z powierzchnią jakiejkolwiek figury prostokątnej, zawisło, od porównania okręgu koła z linią jaką prostą: albo, (co na jedno wychodzi) kwadrowanie koła, zawisło od wyprostowania jego okręgu, czyli od wynalezienia linii prostej równej okręgowi koła.

391. *Wniosek 3.* Wszystkie sposoby postępowania, które się wyżej podawały, do zrobienia kwadratu równego sum-

summ  
kwadr  
nia lu  
stosun  
przys  
mach  
które  
ły bok  
dobne

A  
wierz  
bę cz  
kowe  
lic pr  
zaczę  
głosci  
od to  
kwad  
i t. d.  
lic k  
ła sp  
na 7.  
trycz  
podzi  
niem  
kow  
powi  
równ

3  
cink  
że o  
w sa



summie, albo różnicy dwóch innych kwadratów danych, końcem powiększenia lub zmniejszenia kwadratu w danym stosunku, mogą być równie i do kół przysióswane, czyniąc na nich promieniach lub średnicach, te same dzielenia, któreby się na nich czyniły, gdyby były bokami kwadratów, na którychby podobne odmiany czynić przypadało.

A w szczególności, chcąc podzielić powierzchnią koła danego, na pewną liczbę części równych, przez koła współśrodkowe (circuli concentrici); trzeba podzielić promień tego na tyleż części równych, zaczawszy od środka; tak, aby odległości punktów podziału coraz dalszych od tegoż środka, były do siebie jak kwadraty liczb następnych 1, 2, 3, 4, 5, i t. d. Niechby n. p. przypadało podzielić koło na 7. części równych przez koła współśrodkowe. Podzielmy promień na 7. części równych: średnie Geometryczne między odległościami punktów podziału od środka, i całym promieniem, będą promieniami kół współśrodkowych, przez które podzieloną będzie powierzchnią koła danego, na 7. części równych.

392. Wyznaczenie powierzchni wy-  
cinków, i odcinków kół, zawisło tak-  
że od wyznaczenia okręgu koła. Jakoż  
w samej rzeczy.

1. Powierzchnią wycinka tak się ma do powierzchni koła, do którego ten wycinek należy: iak się ma łuk wycinka, do okręgu koła: to jest, iak się ma Trójkąt, którego wysokością jest promień a podstawą ten łuk, do Trójkąta mającego za wysokość tenże promień, a za podstawę okrąg koła. A że ten ostatni Trójkąt byłby równy powierzchni koła; więc i pierwszy Trójkąt równy jest powierzchni wycinka.

2. Odcinek mniejszy od półkoła, jest różnicą między wycinkiem mającym tenże sam łuk, co i odcinek, i między Trójkątem równoramiennym, mającym spólną z wycinkiem podstawę, wierzchołek zaś w środku koła.

A że powierzchnią wycinka, równą się Trójkątowi, mającemu za wysokość promień, a za podstawę łuk wycinka: a powierzchnią Trójkąta, o którym mowa (wziawszy w nim za podstawę ieden z promieni, to jest z ramion jego, a za wysokość wstawę łuku, należącego do wycinka), równą się Trójkątowi, mającemu za wysokość promień, a za podstawę wstawę łuku; więc powierzchnią odcinka mniejszego od półkoła równać się będzie Trójkątowi mającemu za wysokość promień, a za podstawę różnicę łuku wycinka od wstawy tegoż łuku. Arytmetycznie ta powierzchnia

wy-

### O kwadrowaniu kąta, 367

wyraża się rozmnożeniem liczby oznaczającej połowę promienia, przez inną liczbę oznaczającą różnicą łuku wycinka od wstawy tegoż łuku.

Powierzchnią odcinka większego od półkoła, jest sumnią z wycinka zawierałego między swemi ramionami ten sam łuk, większy od półkoła, i Trójkąta, w którym, wzięwszy za podstawę promień, wysokością byłaby wstawa łuku czyniącego z łukiem pierwszym okrąg cały; a zatem powierzchnia tego odcinka, równa się Trójkątowi mającemu za wysokość promień, a za podstawę sumię z łuku odcinka tego, i z wstawy łuku, który spełnieniem jest pierwszego łuku do całego okręgu, albo, (co na jedno wychodzi), z wstawy różnicy między łukiem odcinka, i półokręgiem.

393. *Defin:* W kołach niejednakowego promienia, wycinki i odcinki podobne, te są, których łuki są do siebie podobne, to jest, równą stopniów liczbę w sobie zamykają: a te łuki tak się mają do siebie, jak całe okręgi, a zatem jak promienie tychże kół.

394. *Twierdż:* 4. Wycinki i odcinki podobne w kołach nie jednakowego promienia, tak się mają do siebie, jak koła, do których należą.

Tab. XXII.

1. Niech będą dwa wycinki podobne  
Fig. 2. ABCDA, abcd, te dwa wycinki są do  
siebie iak koła, do których należą.

*Dowódz:* Wycinek ACBDA, tak się  
má do koła, do którego należy; iak łuk  
ADB, do okręgu ADBEA, albo (393)  
iak łuk adb, do okręgu adbda, toiest,  
iak wycinek acbda, do koła, do którego  
należy. Więc te dwa wycinki są do sie-  
bie iak koła, do których należą, toiest  
w stósunku dwumnożnym promieni tych-  
że kół.

Niech będą dwa odcinki: ABDA,  
abda, podobne, te dwa odcinki tak się  
mają do siebie, iak koła, do których  
należą.

*Dowódz:* Wycinki ACBDA, abcd, a  
mają się do siebie w stósunku dwumno-  
żnym promieni CA, ca, toiest, iak  $CA^2$ ,  
do  $ca^2$ . Trójkąty podobne: ACBA, acba,  
w tymże samym iedn do drugiego są  
stósunku; więc te dwa wycinki tenże  
sám do siebie mają stósunek, co i te  
dwa Trójkąty. Więc różnica (albo sum-  
ma) pierwszego wycinka, i pierwszego  
Trójkąta, toiest odcinek ABDA, tak  
się má do różnicy (albo do summy) dru-  
giego wycinka i drugiego Trójkąta, to-  
iest do odcinka abda, iak się má pier-  
wszy wycinek do drugiego: toiest, w stó-  
sun-

podobne  
i są do  
za.

takie się  
jak łuk  
6. (393)  
to jest,  
którego  
a do sie-  
to jest  
ni tych-

ABDA,  
tak się  
których

acbdb,  
wumno-  
ak CA<sup>2</sup>,  
A, acba,  
giego są  
i tenże  
co i té  
bo sum-  
rwszego  
A, tak  
ny) dru-  
gata, to-  
na pier-  
y, w stó-  
sun-

sunku dwumnożnym. promieni kół, do których té odcinki należą.

395. Defini: Niech będą dwa koła spółśrodkowe, miejsce zawarte między ich okręgami, nazywa się Koroną.

396. Twierdza: 5. Powierzchnia jednej takiej korony równa jest prostokątowi mającemu wysokość równą szerokości téj korony, a podstawę równą okręgowi koła, którego promień równałby się połowie summy promieni okręgów dwóch, koronę tę zawierających.

Niech będą CA, CB, promienie dwóch kół spółśrodkowych; przedzielnym AB na dwie równe części w F: linią CF, będzie połową summy dwóch promieni CA, CB należących do dwóch kół spółśrodkowych: korona zawarta między temi kołami, równa jest prostokątowi mającemu szerokość AB téj korony za wysokość, a za podstawę okrag, którego linią CF byłaby promieniem. Poprowadźmy AD prostą do AC, i dajmy, że AD równa się okręgowi którego promieniem jest CA. Złączmy punkta C i D, linią CD, a przez punkta B i F, pociągniemy dwie linie równoodległe od AD, aż do ich spotkania się z linią CD, w punktach E i G.

Tab. XXII.  
Fig. 3.

Ponieważ CA: CB=AD: BE

i CA: CB=okrag CA:okregu CB.

wiec AD: BE=okrag CA:okregu CB.

A że AD wzięta jest za linią równą

Z okregu



okręgowi, którego  $CA$  jest promieniem; więc i  $BE =$  okręgowi  $CB$ .

Podobnym sposobem dowieść można, że linia  $FG$ , równa jest okręgowi, którego promieniem byłaby linia  $CF$ .

Powierzchnie kół, których promieniami są  $CA$ , i  $CB$ , równają się Trójkątóm,  $CAD$ , i  $CBE$ ; a zatem powierzchnia korony równa będzie czworokątowi  $ABED$ . Przez  $G$  poprowadźmy równoodległą od  $AB$ , któraby spotkała  $AD$  w  $H$ , a  $BE$  w  $J$ ; Trójkąty prostokątne  $GDH$ ,  $GEJ$ , mają boki  $GH$ ,  $GJ$  równe, i kąty równe, więc mogą przystać do siebie: a zatem summa z Pięciokąta  $BEGHA$ , i z Trójkąta  $GEI$ , to jest Prostokąt  $ABIH$  równa się summie z Pięciokąta  $BEGHA$ , i z Trójkąta  $GDH$ , to jest, równa się czworokątowi  $BEDA$ . A że ten czworokąt równy jest powierzchni korony; więc też korona równa będzie prostokątowi  $ABIH$ , to jest prostokątowi, który ma szerokość korony za wysokość, a za podstawę okrąg, w którym, promieniem jest średnica arytmetycznie proporcjonalna, między dwoma promieniami, czyli połowa summy tychże dwóch promieni.

397. Podobnie i różnica w kołach spółśrodkowych, wycinków dwóch, zawartych między temiż samemi promieniami, równa się Prostokątowi mającemu za wysokość różnicę dwóch promieni, a za podstawę łuk podobny łukóm wycinków dwóch

dwóch danych, i należący do okręgu, którego promień, jest średnim arytmetycznym między promieniami tych dwóch wycin-  
ków.

1. Pokazawszy, iż skwadrowanie koła, lub części jego, zawisło od wyprostowania jego okręgu; przystąpmy do szukania tego sprostowania.

Zadanie to, aż nazbyt wstawnione, zatrudniło wielu przypisujących sobie nazwisko Geometrów, którym ledwie początki Matematyki były znaiome; a i zadania nawet samego nie rozumieli. W czym było omyłne ich rozumienie; bawić się nad tem, nie sędzę byż rzecz potrzebna. Mogą Nauczyciele, chcący mieć obszerniejszą w téj mierze wiadomość, czytać Montukli przemowę do *Historji o dochodzeniu kwadrowania koła* (*Histoire des recherches sur la quadrature du Cercle*;) Dosyć będzie powiedzieć, że treść tego zadania na tem zawisła, aby wynaleźć linią prostą równą okręgowi koła podanego. Nie rozumie się tu zaś równość pozorną, i zmysłową (jak ci mniemają, którzy koło z drewna lub z kruszczu wyrobione tocząc po iakiéj płaszczyźnie, mierzą długość linii, którą punkt ieden tego koła przebiegł; albo, którzy koło iakiéj nicią okręcają, i biorą potem długość téj nici, albo na koniec, którzy ważą takowe koło, i one porównywiają z kwadratem podobnej materji i jednakowej z kołem grubości: ale się rozumie

równość umysłową, czyli taką, o której można by się przeświadczyć przez rozumowania podobne tym, jakich używaliśmy do dowiedzenia prawd, w tym przeciągu dzieła, wyłuszczonych.

398. Archimedes trzysta lat blisko przed Narodzeniem Chrystusa, znalazł stósunek okręgu do średnicy, tak blizki prawdziwemu, że we zwyczajnych zdarzeniach jest dostatecznym, a przytém, i w używaniu wygodnym. Doszedł on, że oznaczwszy średnicę koła przez 1. Okrąg jego większy będzie niż  $3\frac{10}{71}$ , a mniejszy niż  $3\frac{1}{70}$  albo, że wyraziwszy długość średnicy przez 497. okrąg będzie większy niż 1561, a mniejszy niż 1562; uchybienie zatem byłoby náywięcéy w części  $\frac{1}{1561}$  całego okręgu; a któregokolwiek ze dwóch stósunków używszy, n. p. ostatniego, ten wypadłby na stósunek 7 do 22.

Późniéy po Archimedesie, wynaleziono sposoby krótsze, któremi dochodzi się stósunków bardziéy ieszcze zbliżonych do prawdziwych. Do téy nawet dokładności już przyszło, że wyraziwszy średnicę koła przez 1, z zerami 127 przydanemi, wynaydzie się okrąg w liczbie złożony z tyluż znaków liczebnych, z uchybieniem mniejszem od iedności ostatniego, a náymniej wyrażającego znaku téyże liczby. Sposób iednak dochodzenia z tą dokładnością wążności okręgu koła, nie

nie może być w tych początkach Ucznióm wykładany. Przytoczymy jednak stósunki niektóre wygodniejsze średnicy koła do okręgu, wyjęte z Xiegi sławnego P. Huyghens o wywódkach wielkości koła (*de circuli magnitudinis inventa*.) Używając Dwunastokąt wpisanego w koło, i na kole opisanego, można wynaleźć dokładniejszy stósunki średnicy koła do okręgu, niżeli te, których doszedł Archimedes przez wielokąty o 96 bokach, wpisané w koło, i na nim opisané; ale na to miejsce rachunek Archimedesa mieć wyciąga poprzedzających podać, niżeli rachunek na dwunastokącie czyniony.

399. Stósunki średnicy do okręgu koła przybliżone do prawdziwych są następujące.

7	do	22.
100	do	314.
106	do	333.
113	do	355. (q)

Ponieważ stósunek powierzchni koła, do kwadratu średnicy jego, ten sam jest, co stósunek okręgu koła do średnicy czterzy razy wziętę; więc stósunki powierzchni koła do kwadratu średnicy będą następujące.

22

(q) Napisawszy trzy pierwsze nieparzyste liczby 1.3.5. po dwa razy, jedną przy drugiej, tak: 113355 liczba 113, zawierająca trzy pierwsze znaki, wyrażać będzie średnicę, liczba zaś 355, zawierająca trzy ostatnie znaki, wyrazi z małym uchybieniem okrąg koła.

22 do 28, albo, 11, do 14.  
 314 do 400, albo, 157, do 200.  
 333 do 424.  
 355 do 452

Czyniąc przybliżenia dokładniejsze, lecz bardziej zawile, i używając sposobów krótszych, ale początkowe wiadomości przechodzących, znaleziono, iż okrag koła zawiera w sobie średnicę, razy  $3,141\,592\,653\,\frac{5}{6}$

Skąd wynika stosunek powierzchni koła, do kwadratu średnicy, albo stosunek okręgu koła do średnicy jego, cztery razy wzięty, równy stosunkowi  $3,141\,592\,653\,\frac{5}{6}$  do 4, albo  $3\,141\,592\,653\,\frac{5}{6}$  do  $4\,000\,000\,000\,0$ .

Z czterech po wyżej wyrażonych stosunków średnicy do okręgu koła; pierwszy daie okrag koła większy razy

drugi  $3,142\,8 +$  od średnicy;  
 drugi  $3,140\,0$ .  
 trzeci  $3,141\,509, +$   
 czwarty  $3,141\,529\,92 +$

Widzimy tu, iż stosunek pierwszy, daie okrag koła nad to wielki, drugi i trzeci daie ten okrag nadto mały, a czwarty, znówu nadto wielki; trzeci iednak i czwarty stosunek dokładniejszy iest od dwóch pierwszych, a zwłaszcza czwarty, który ieszcze w millionowych cząstkach daie okrag koła nie różniący się od ważności.



## O kwadrowaniu koła. 375

żności iego wyżey podaney (r) a iak  
náyściśley wyrachowaney.

400. Z tego co poprzedzało, łatwo  
jest rozwiązać przez przybliżenie, na-  
stępujące zagadnienia.

1. Maiąc daną średnicę koła, zna-  
leźć iego okrąg.

2. Maiąc dany okrąg koła, znaleźć  
iego średnicę.

3. Maiąc daną średnicę koła, znaleźć  
iego powierzchnią.

4. Maiąc daną powierzchnią koła, zna-  
leźć iego średnicę.

5. Znaleźć bok kwadratu równego  
kołu danému.

Znáydujemy, iż stósunek średnicy  
koła do boku kwadratu równego temu  
kołu, jest, 200000, do 177245±

Ten stósunek przybliża się bardzo do  
stósunków następujących

35	do	31.
44	do	39.
123	do	109.
157	do	148. 6.

(r) W drugiéy Xiędze Pamiętników (Me-  
moires) Matematycznych P. Lamberta, znáy-  
duje się wyborná Rozprawa (Dissertatio) o  
kwadrowaniu koła. Dowodzi tam (§.9.) Au-  
tor, że jeżeli możnaby wyznaczyć stósunek  
dokładny, okręgu koła do średnicy iego,  
tędy liczby, któreby go wyrażały, większeby  
bydź powinny od następujących; które ten  
stósunek przybliżony wyrażaia, toiest: 161 951  
448 609 914 6. do 324 511 540 032 945.

6. Mając dany promień koła, i wartość kątową łuku, (to jest w stopniach) znaleźć długość tego łuku, i powierzchnią wycinka, proporcjonalną temu łukowi.

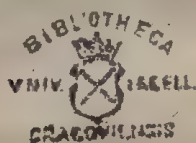
7. Mając dany promień koła, i wartość kątową łuku, znaleźć odcinek między tym łukiem i cięciwą jego.

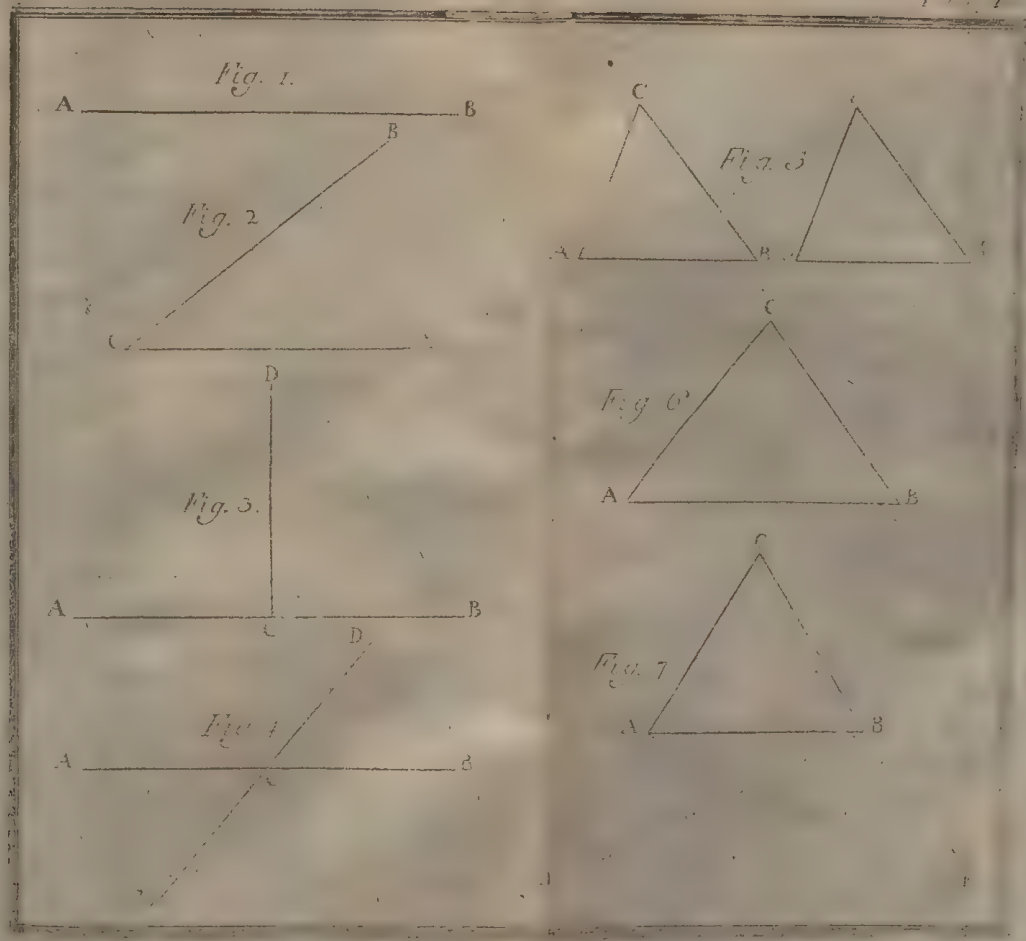
Najłatwież i najprościej rozwiążemy to ostatnie zagadnienie, gdy w Trójkącie, który jest różnicą między wycinkiem i odcinkiem wspierającym się na tymże samym łuku, weźmiemy za podstawę jeden z promieni, a za wysokość wstawę łuku danego: mając albowiem tę proporcję, że powierzchnia koła, tak się ma do powierzchni odcinka (mniejszego od półkoła) jak się ma okrąg cały do różnicy między łukiem odcinka, i wstawą tego koła; i ułożywszy sobie tablicę łuku, podług promienia tablic Trygonometrycznych, łatwo przyydzie rozwiązać to zagadnienie. (s)

8. Znaleźć przez przybliżenie wartość kątową łuku równającego się promieniowi koła.

Przystosowanie tego zagadnienia często bywa używane w wyższych częściach Matematyki.

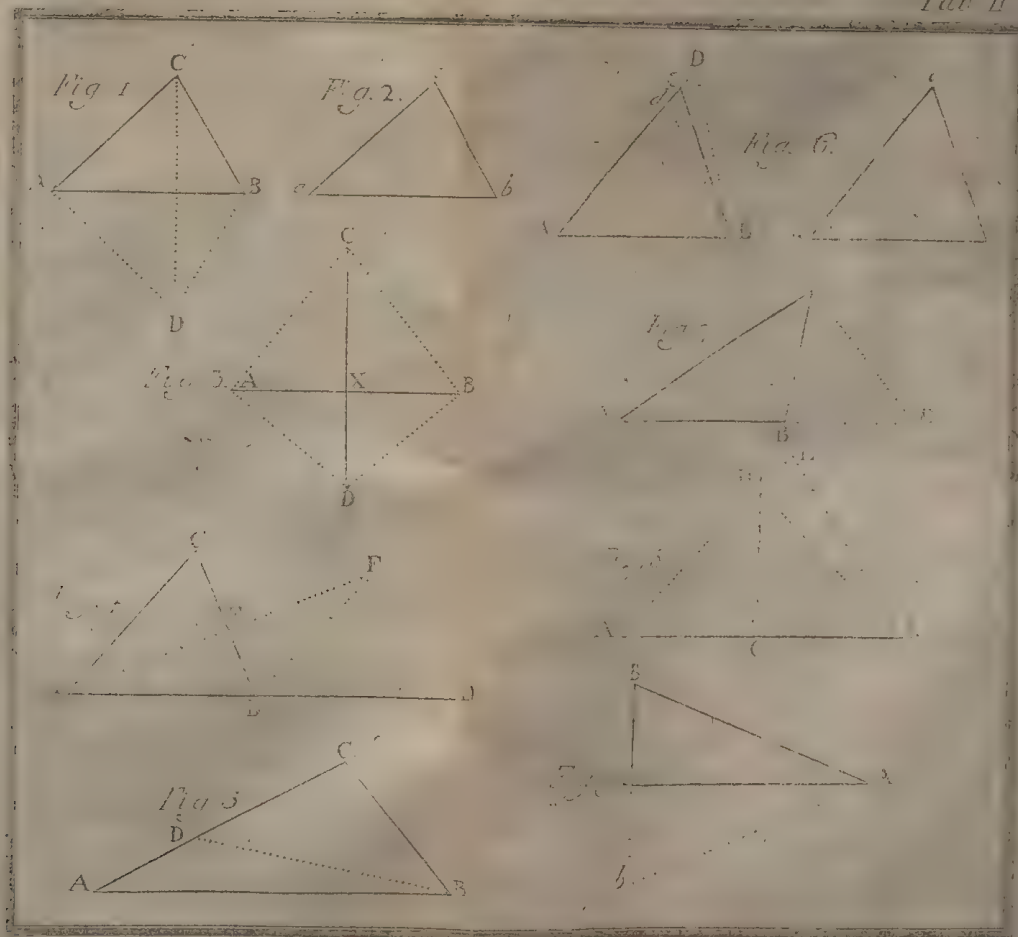
(s) Co się tyczy sposobu ułożenia takowych tablic, obacz przykłady dane w Aritmetyce.





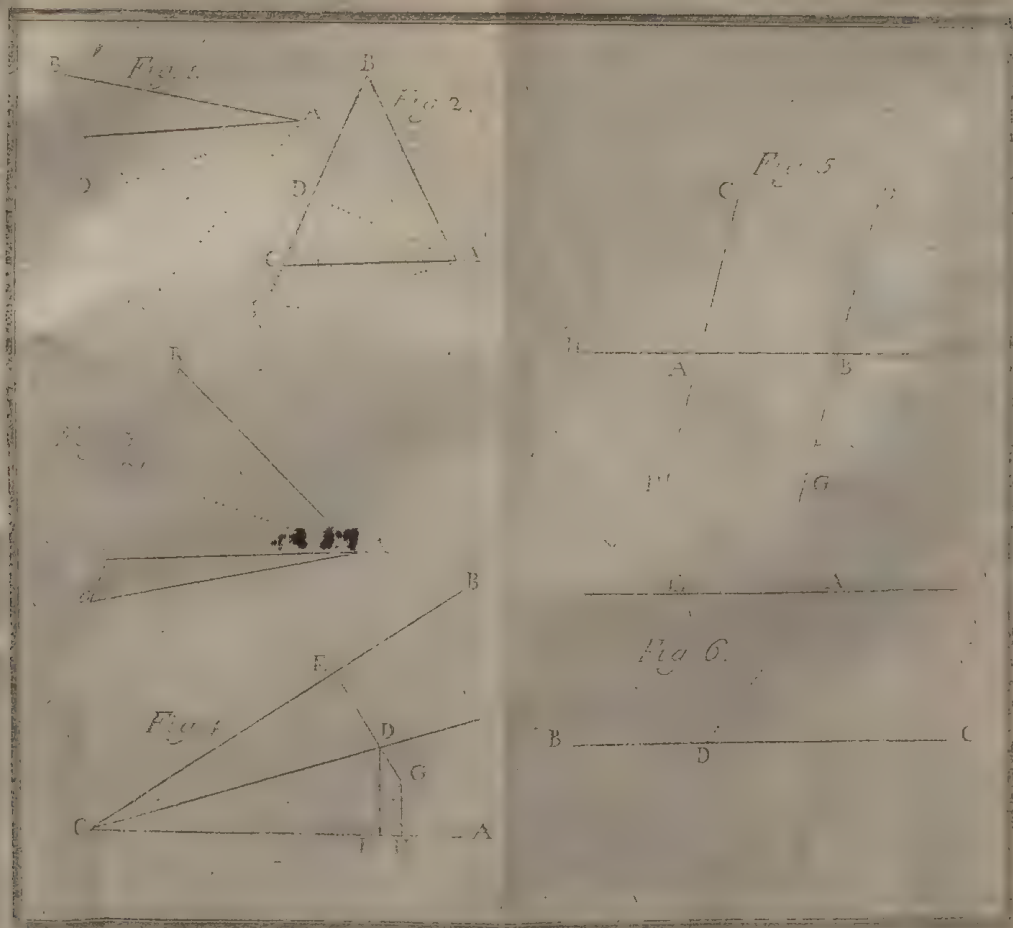
Est. 1843.

Est. 1843.

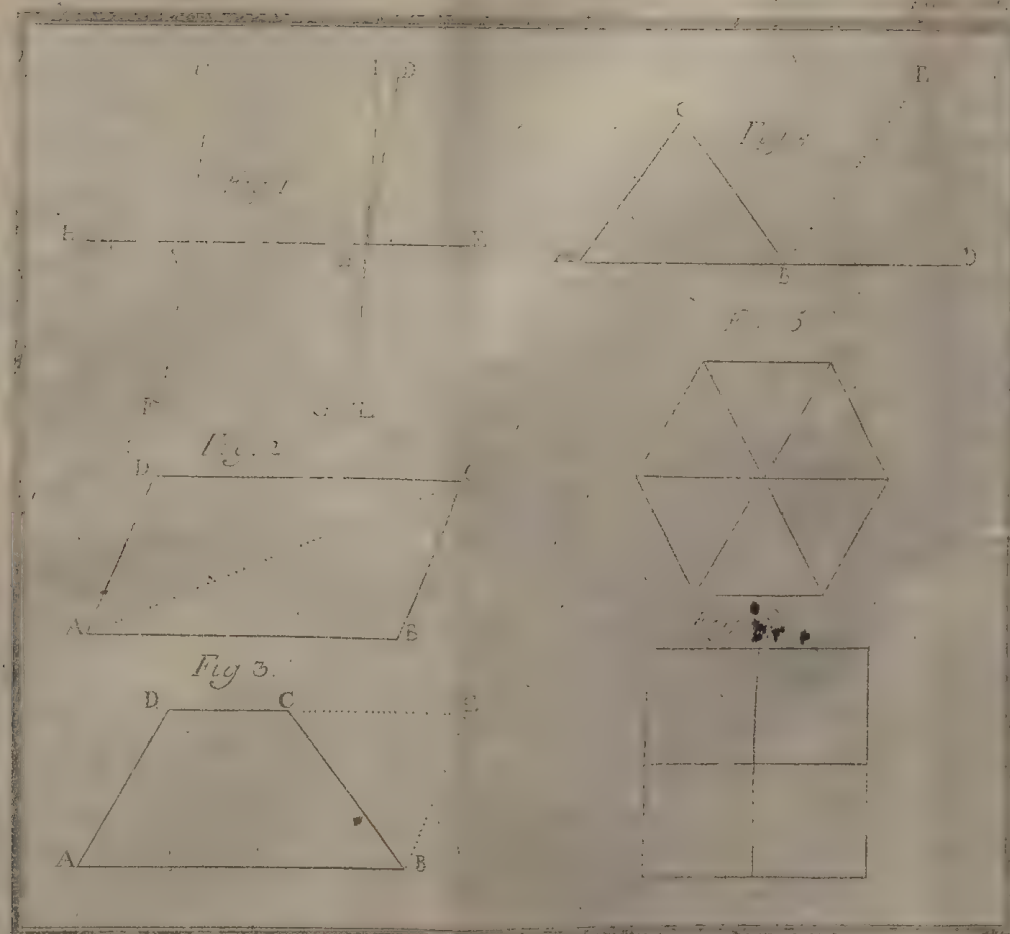








PL 83



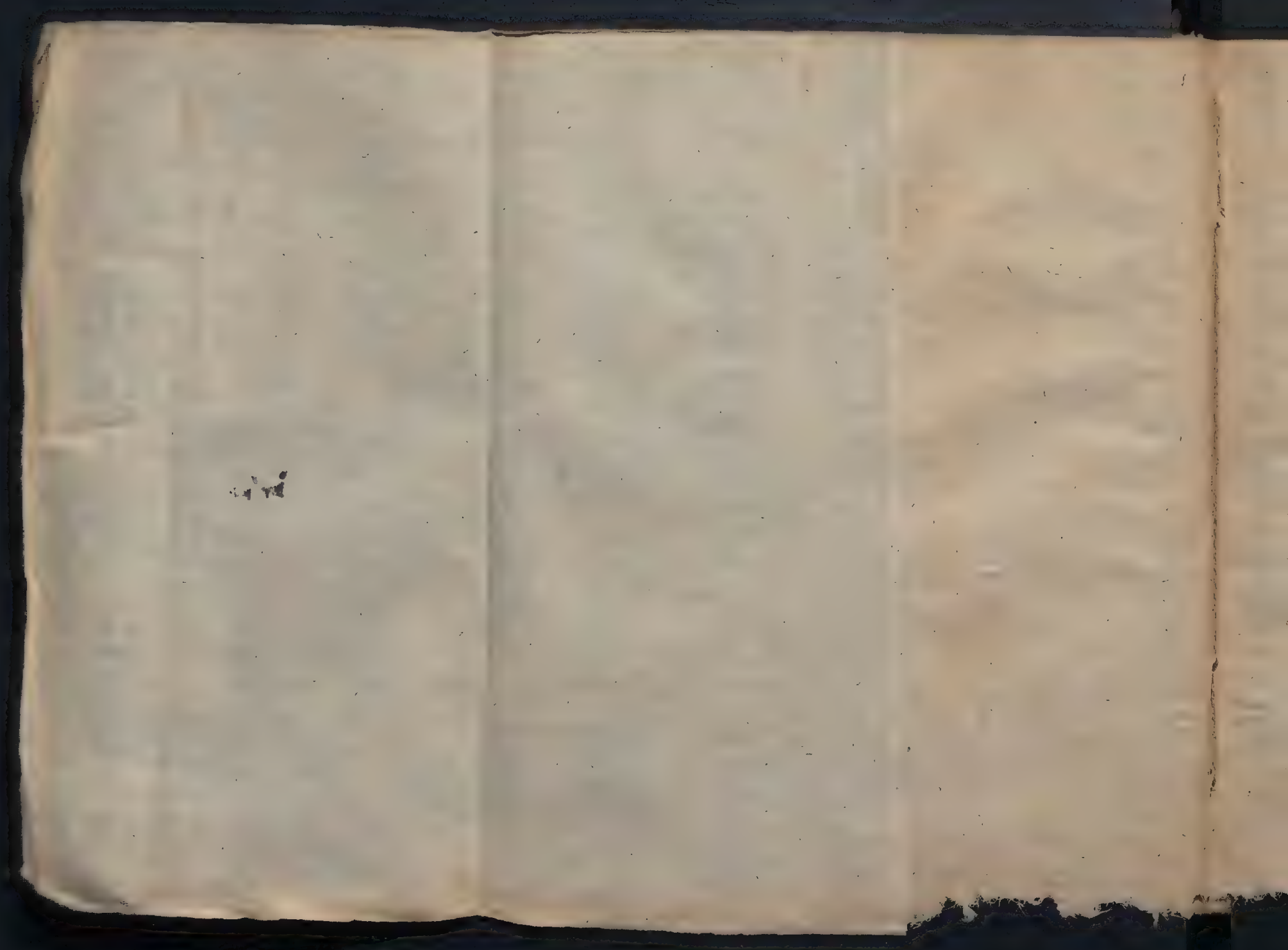




Fig. 1.

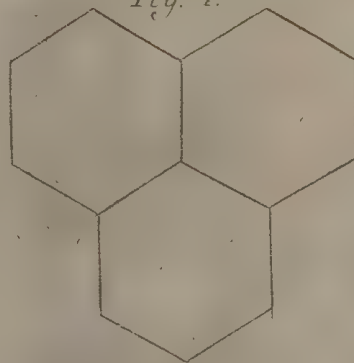


Fig. 2.

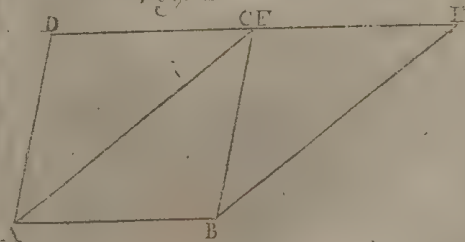


Fig. 3.

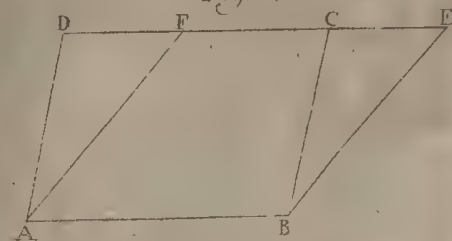


Fig. 4.

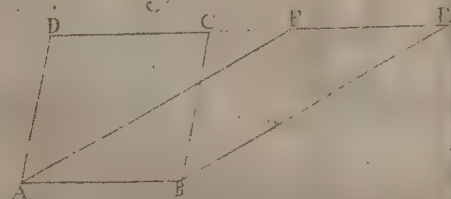
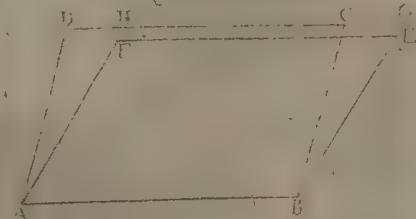


Fig. 5.



222. 100-

Fig. 1.

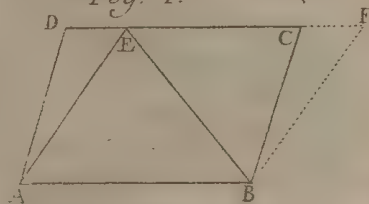


Fig. 2.

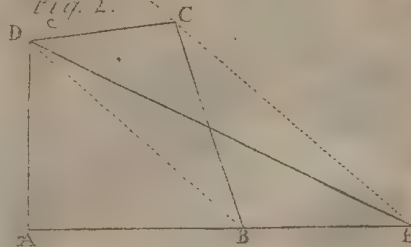


Fig. 3.

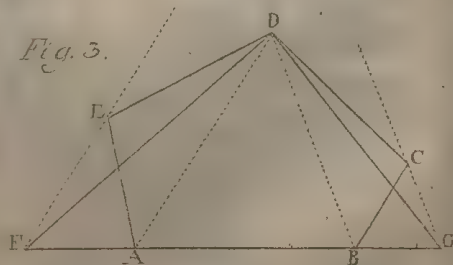


Fig. 4.

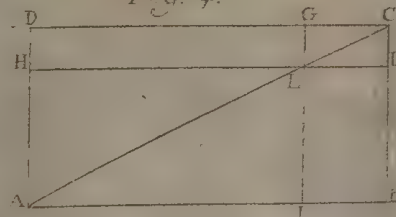


Fig. 5.

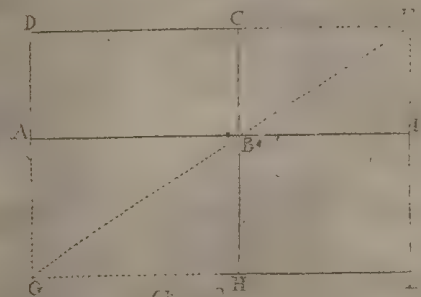
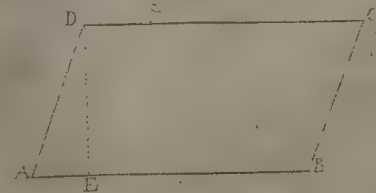
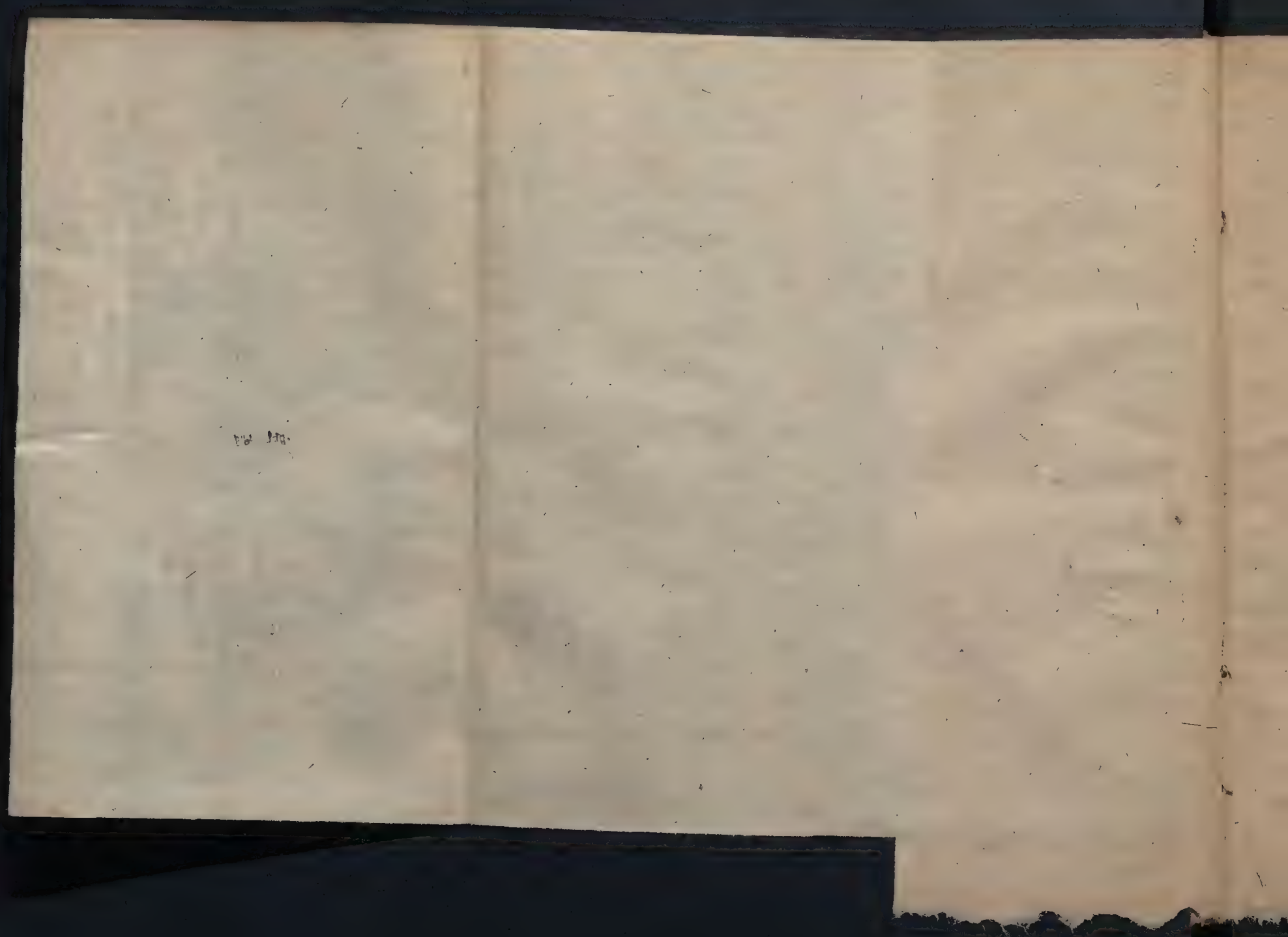
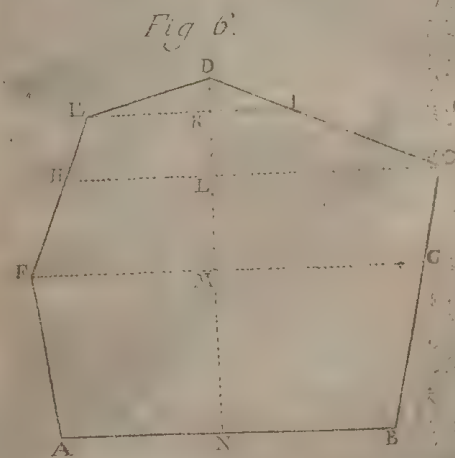
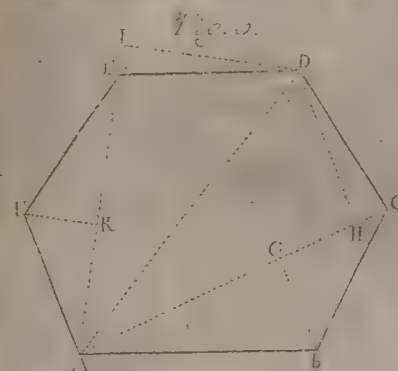
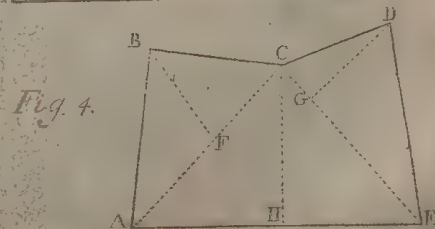
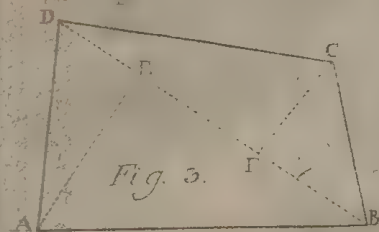
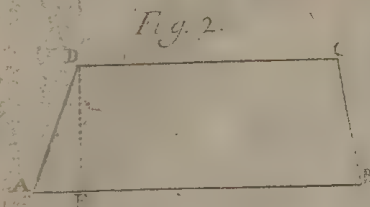
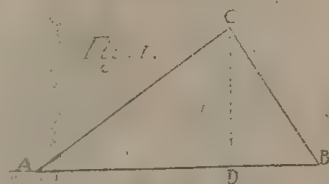


Fig. 6.









Pol. Jug.

Fig. 1.

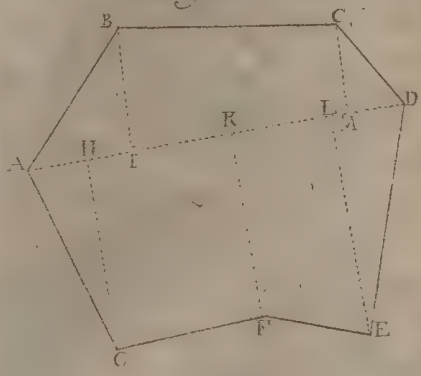


Fig. 2.

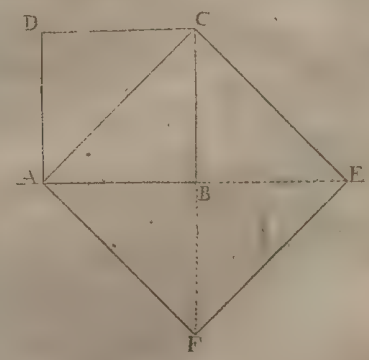
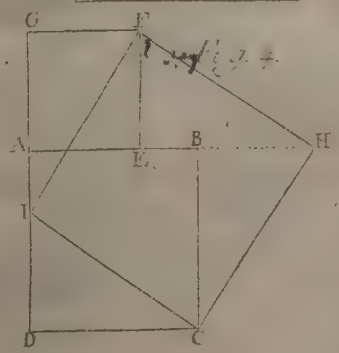
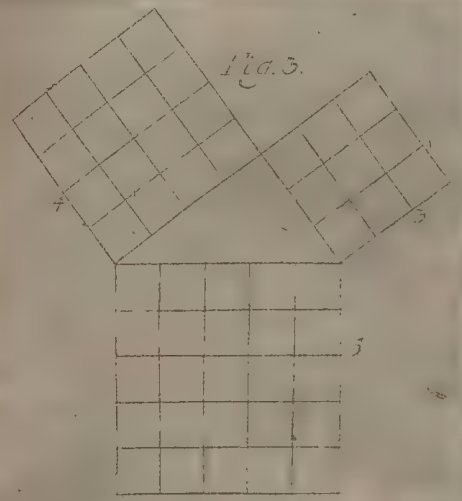
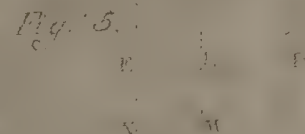
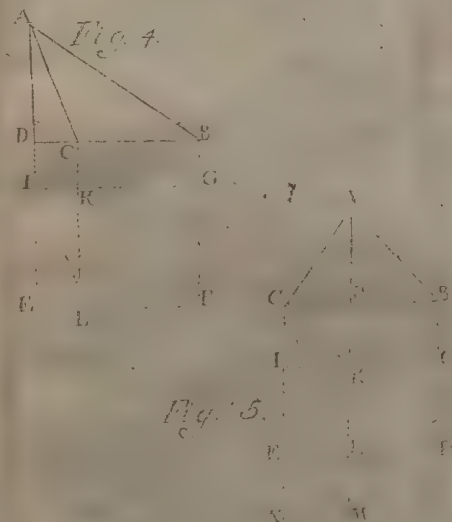
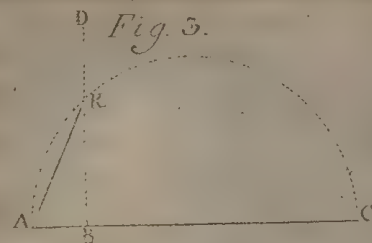
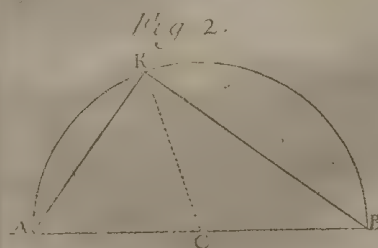
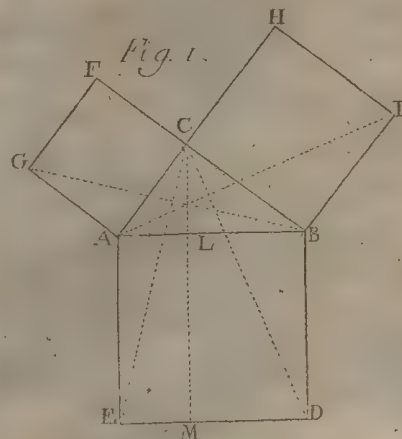


Fig. 3.

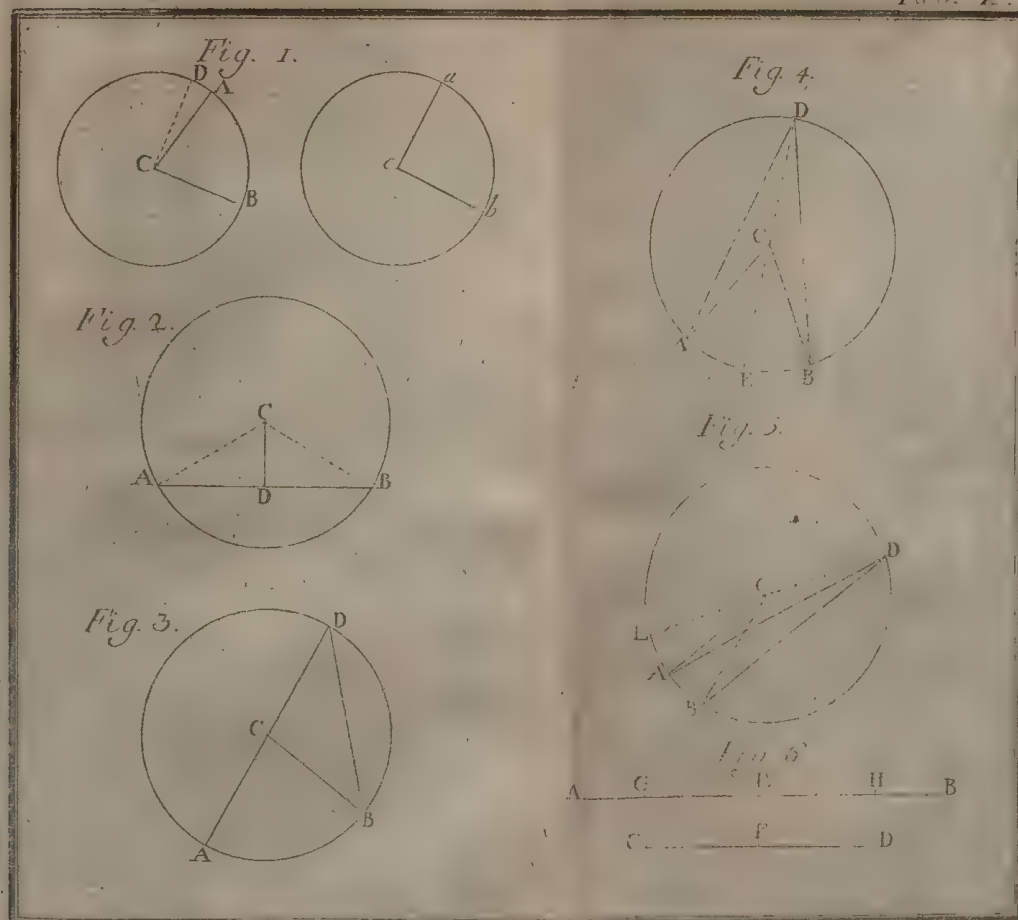


102. 309.

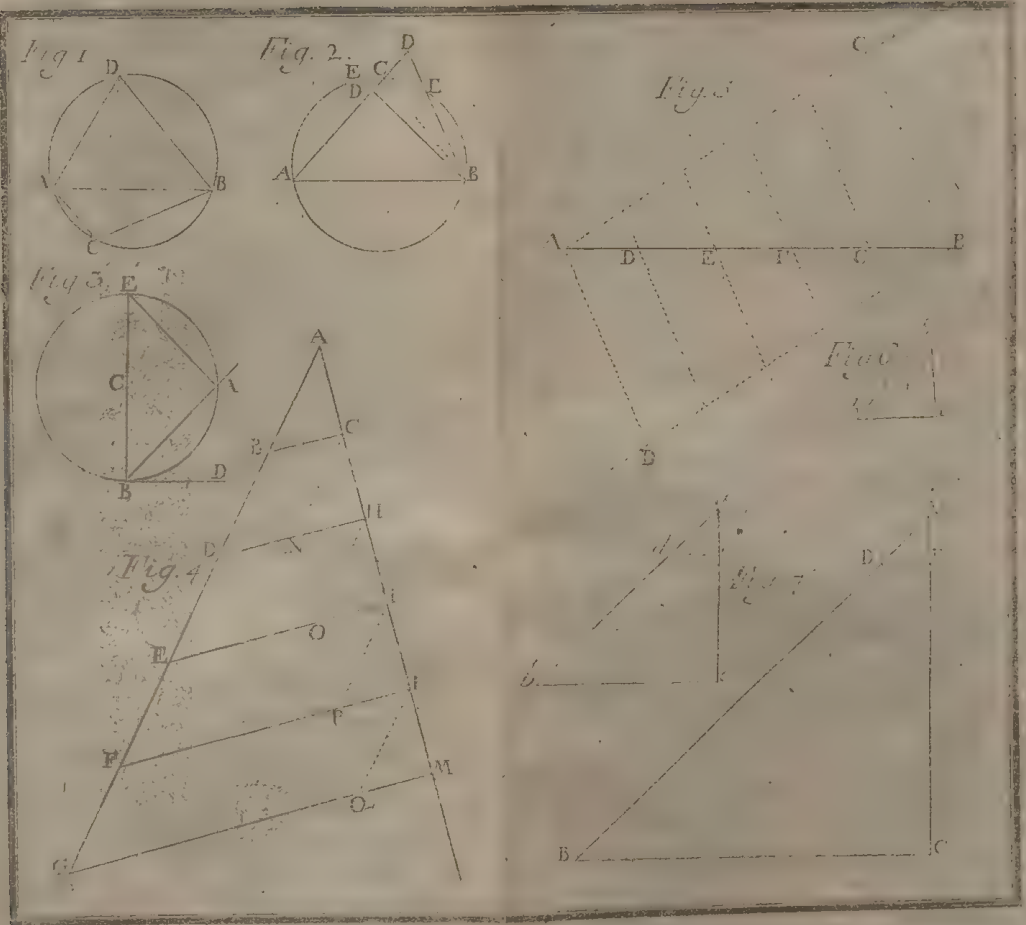


Fol. 100.

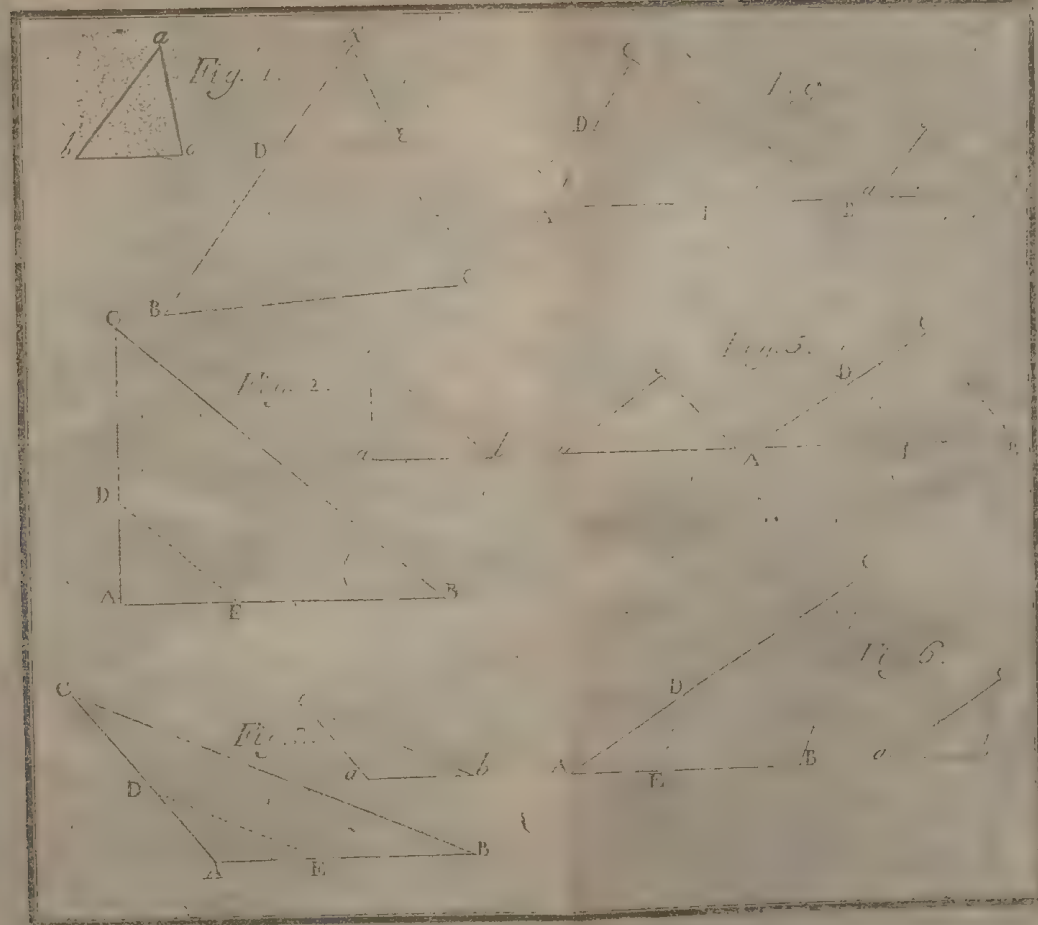




Side 108

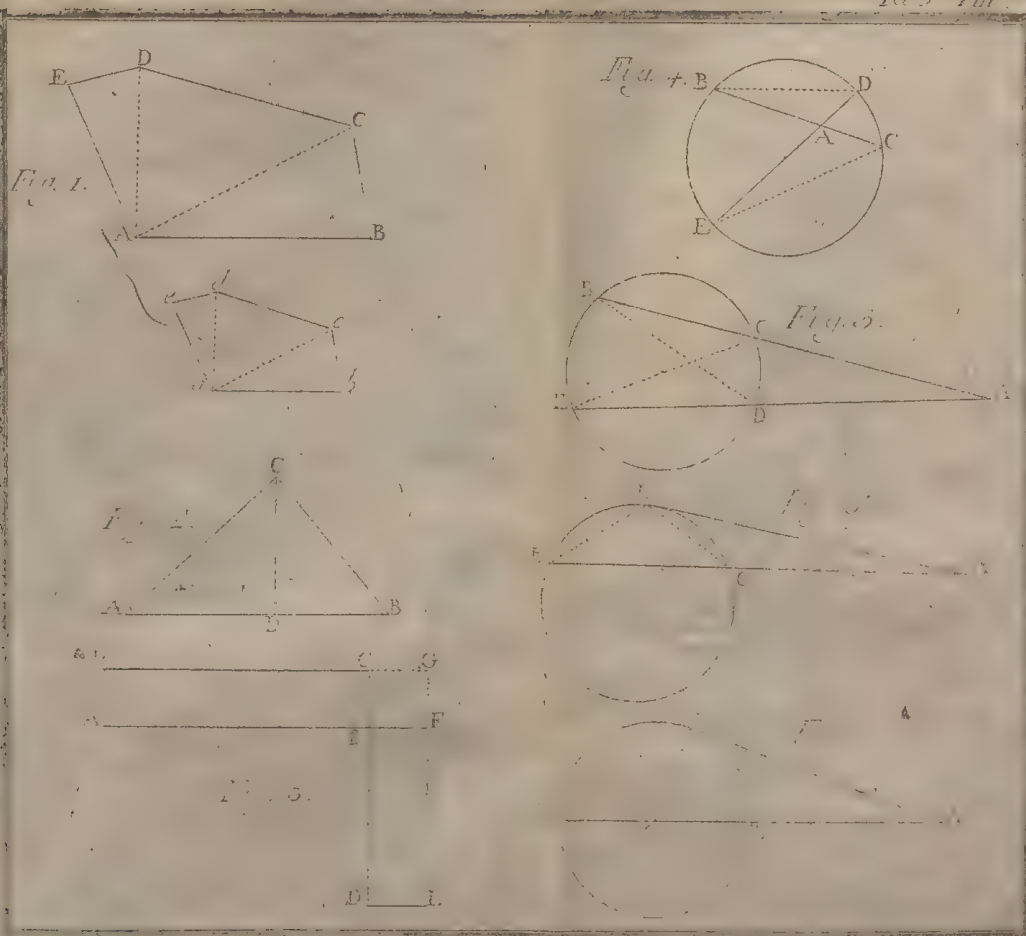


100. 100.  
2





1863. Jan.



Prof. Jdg.

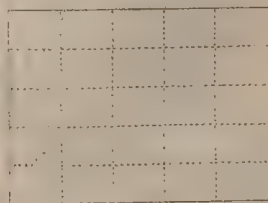
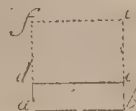
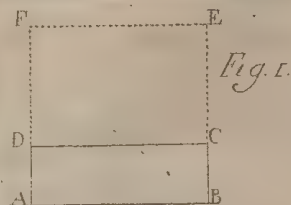
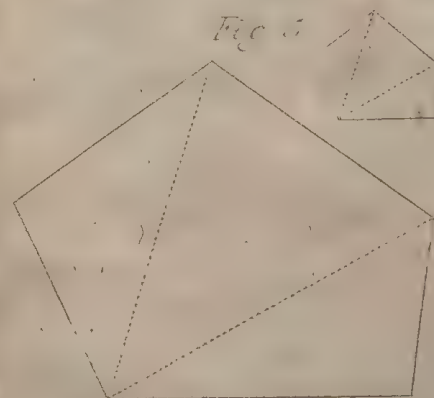
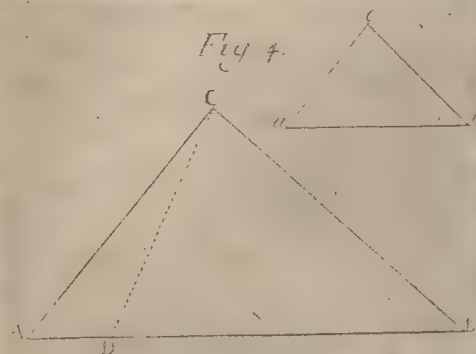
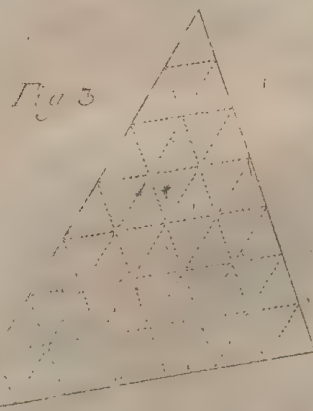
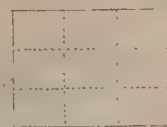


Fig. 2.

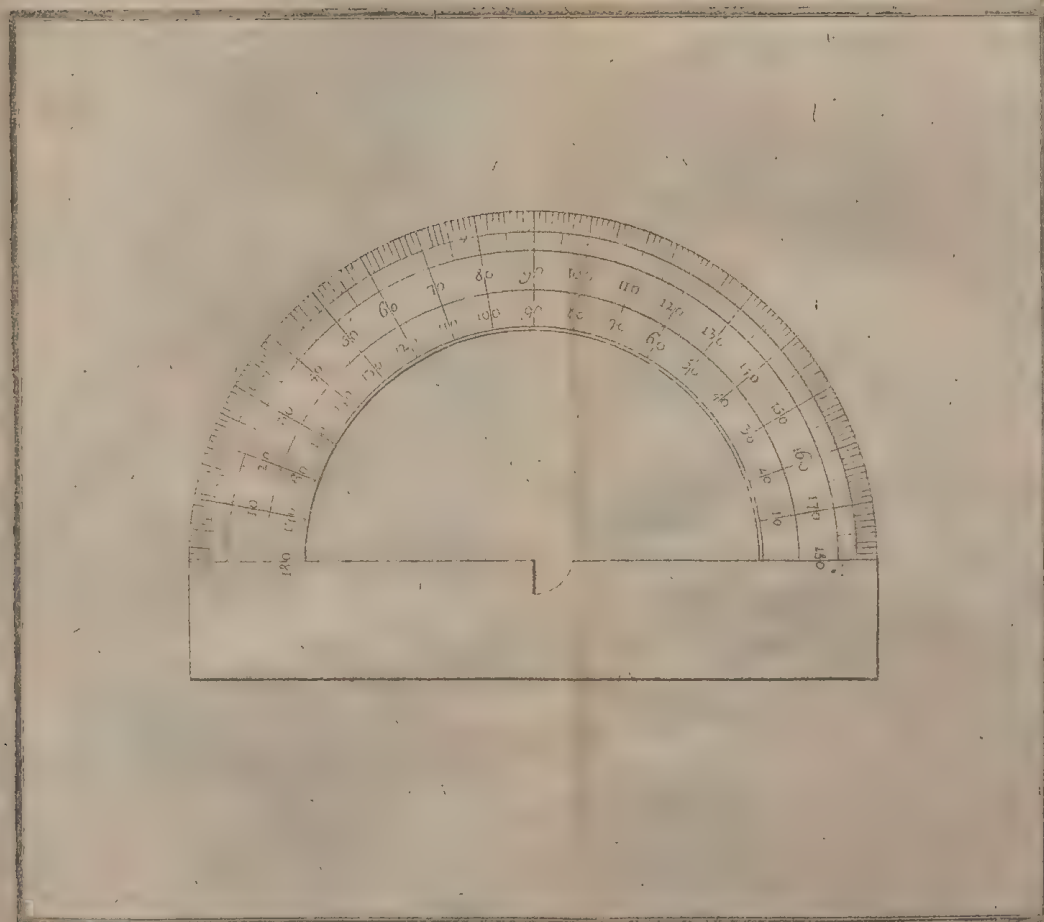


Vol. 12.





Back Jag.

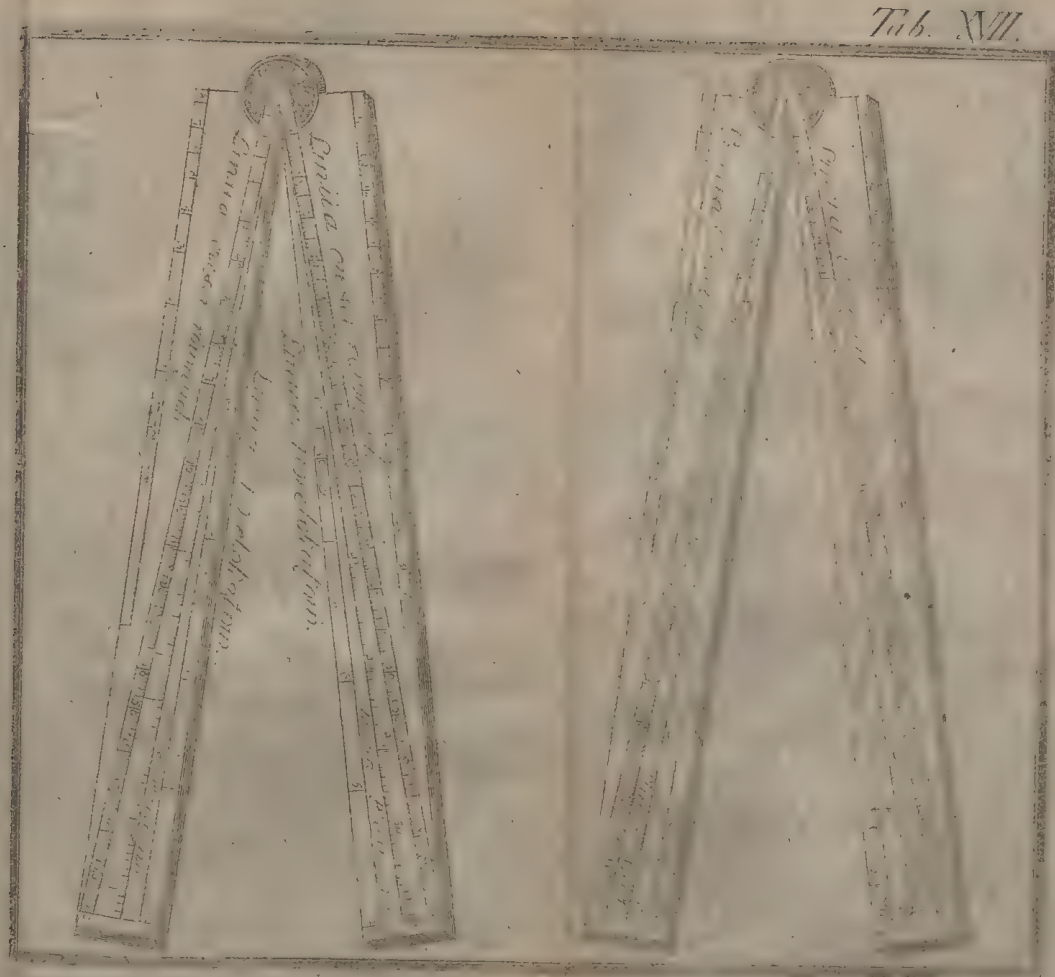


181. 109.

Serenissimam Rempublicam subscripserunt: aliae vero ius suffragij

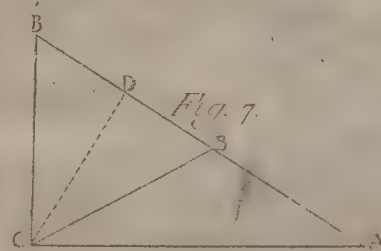
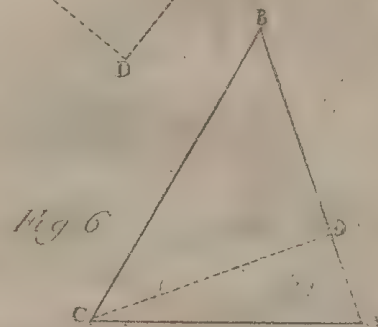
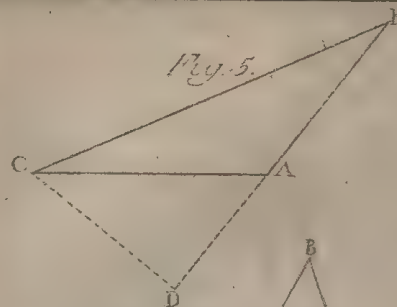
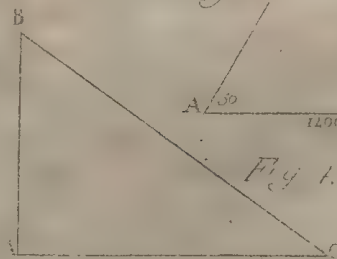
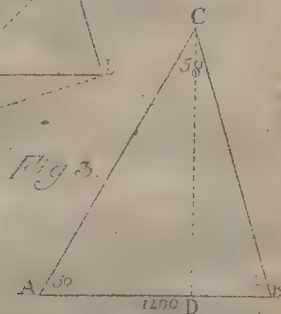
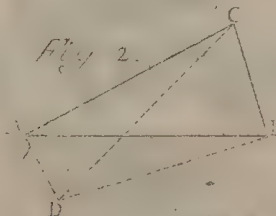
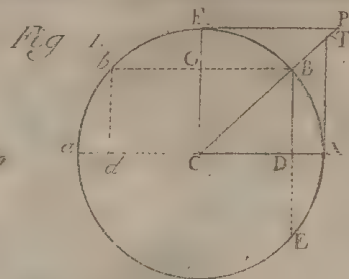


Serenissimam Rempubicam subscripserunt: aliae verò ins. subscr.

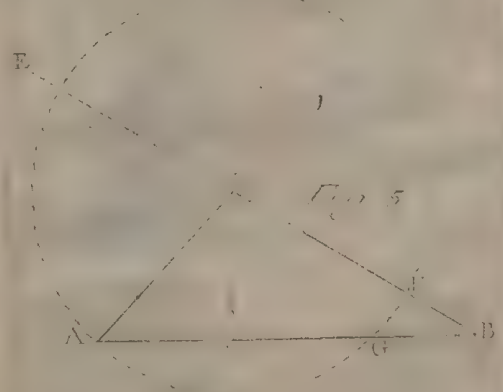
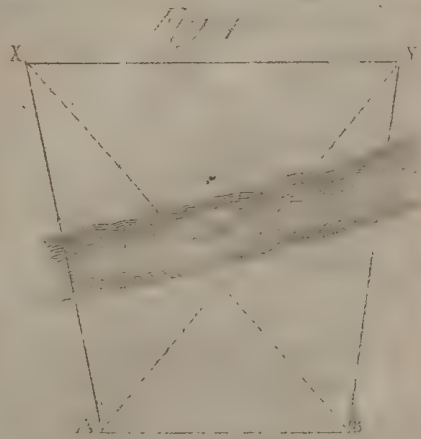
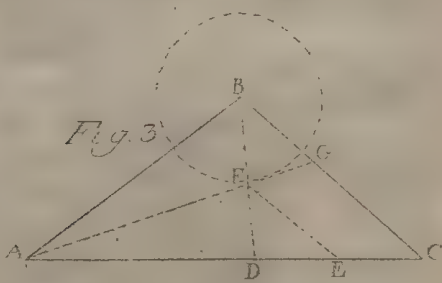
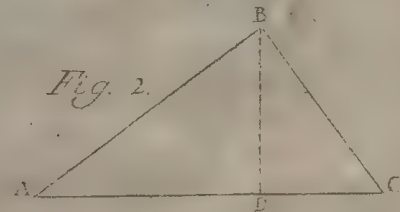
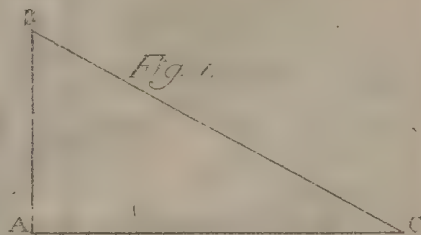




184

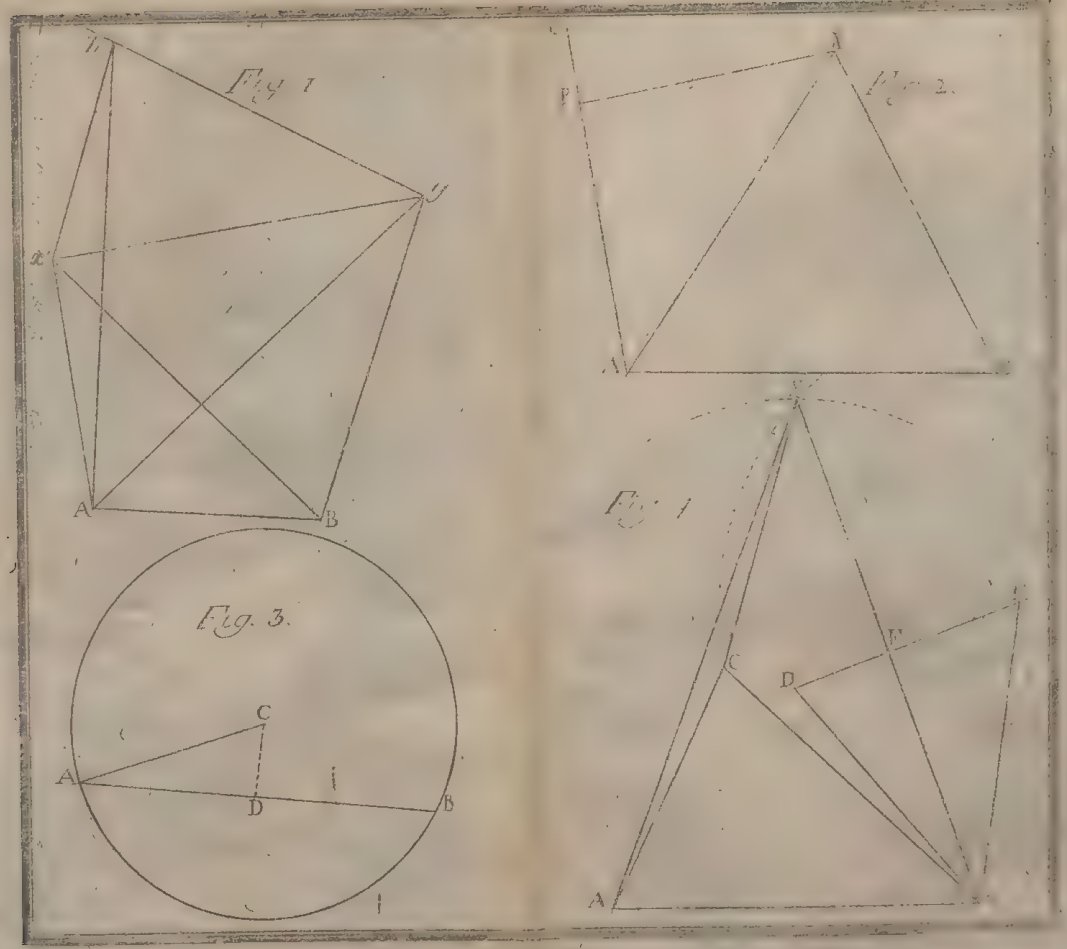


267. log.

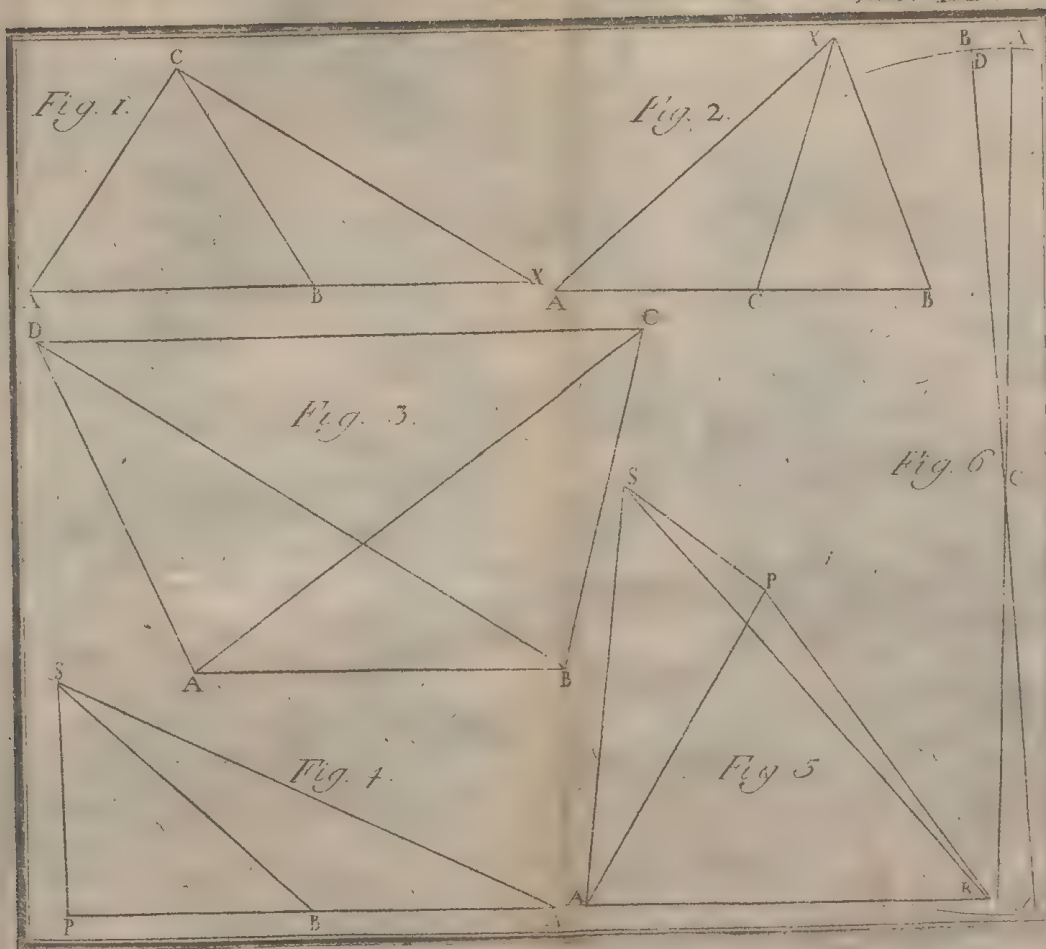


Vol. 100.



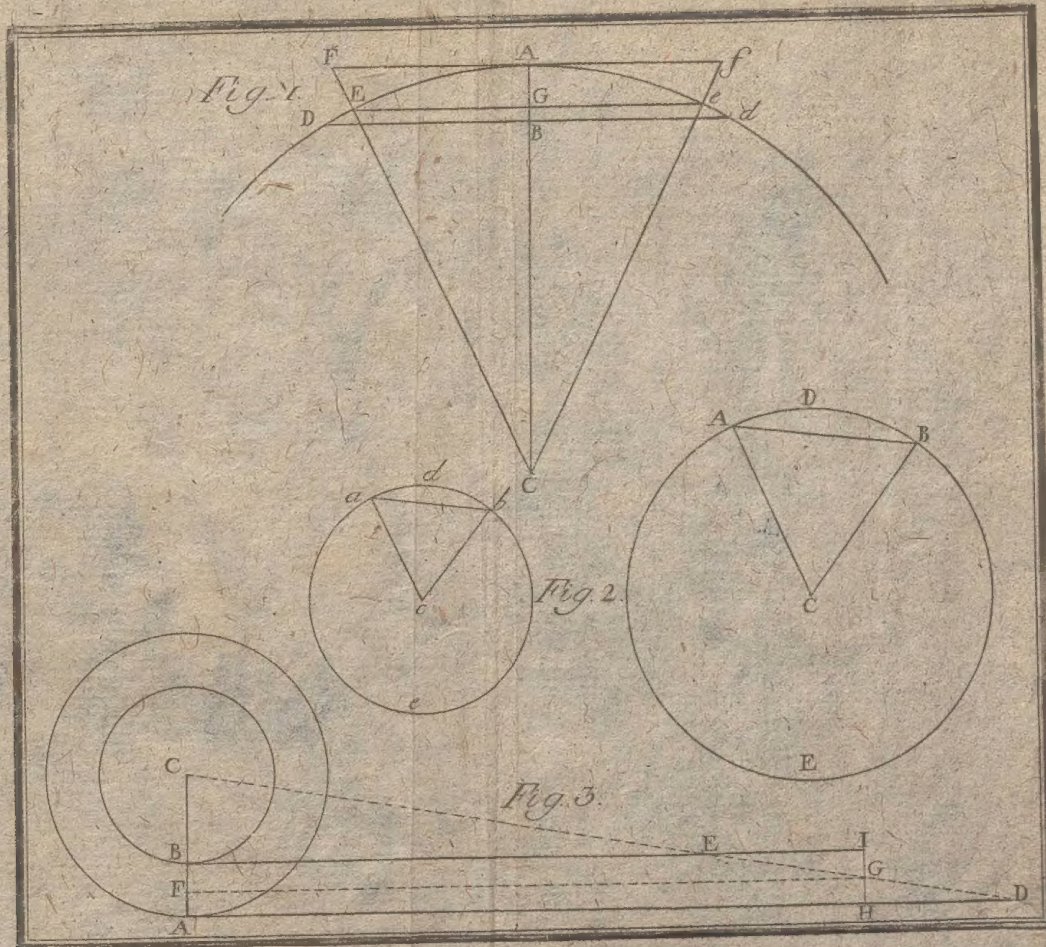






End. log.







Bibl. Jag.

ol. no. art. 30. fol. 122. art. 33. ante danda suffragia sub poena non ad-  
missionis ad eadem, fuerunt aditricae.

Idem in dandi suffragij Civitatis Gedanensi tributum fuisse scribit  
insec. C. in Furore. f. 101. art. 72.



fol. no. art. 30. fol. 122. art. 33. ante danda suffragia sub poena non ad-  
missionis ad eadem, fuerunt adstricta.

Idem in d. suffragij Civitatu Gedanensi tributum fuisse scribit  
in Europ. singular. sub A. 1632. fol. m. 453. sed  
extitisse.

Im jus suffragij etiam alij: ac imò, tempore In-  
NDI AVGVSTI A. 1530. Dux Prussiae, ac locum  
siderium ad proximè futura Comititia rejeçtum  
Hystoriâ rer. Polonic. Lib. 7 pag. m. 526. Deinde  
in electione HENRICI VALESII A. 1573. qui  
ad con-

Biblioteka Jagiellońska



stdr0020622



